

# 地震面波反演问题中顾及误差重要性的讨论<sup>\* 1</sup>

刘 强 姚宜斌 陈浩朋 仲崇豪 雷祥旭  
(武汉大学测绘学院,武汉 430079)

**摘 要** 讨论地震波反演问题中顾及测量误差的重要性,分别采用 LSQR、WLSQR 和 MLS 的方法对含有误差的地震波模拟数据进行了反演,结果表明地震面波反演问题中测量误差的影响显著,忽略测量误差的影响将大大降低反演结果的可靠性。

**关键词** 地震面波反演;最小二乘 QR 分解;加权最小二乘 QR 分解;极小二乘;误差  
**中图分类号**:P207;P315.01 **文献标识码**:A

## DISCUSSION ON IMPORTANCE OF ERROR IN SEISMIC SURFACE WAVE INVERSION

Liu Qiang, Yao Yibin, Chen Haopeng, Zhong Chonghao and Lei Xiangxu  
(School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079)

**Abstract** Importance of observation's error in seismic inversion was discussed, and the seismic wave simulation data that contains error were inversed using methods of LSQR, WLSQR and MLS. The inversion results show that the effect of observation's error is notable in seismic surface wave inversion, and ignoring the observation's error will greatly reduce the reliability of inversion results.

**Key words**: seismic surface wave inversion; LSQR (Least-squares QR decomposition Method); WLSQR (Weighted Least-squares QR decomposition Method); MLS (Minimum Least-squares Method); error

## 1 引言

随着线性及非线性规划、广义逆理论、信息论、非线性动力学、遗传算法、神经网络及最优化方法等现代数理及仿生学工具的引入,地球物理反演研究在理论和方法上均取得了重大进展<sup>[1]</sup>。

20 世纪 80 年代中期,全球数字地震台网的建立,极大地拓展了面波研究地球结构的深度和精度。地震层析成像技术的引进和发展,使面波研究地球结构进入了用面波研究地球三维结构的时期<sup>[2]</sup>。地震层析成像技术虽然也是通过反演问题求解而建

立的,但它与早期走时反演中各种研究方法和思维方式上又有所不同。地震层析成像技术所要解决的核心问题是“成像”,而且尽可能的提高分辨率<sup>[1]</sup>。因此以往的研究往往关注于如何得到反演结果,而忽略了测量中不可避免的观测数据误差对反演结果的影响。针对这一问题,本文分别采用最小二乘 QR 分解 (LSQR, Least-squares QR decomposition Method)、加权最小二乘 QR 分解 (WLSQR, Weighted Least-squares QR decomposition Method) 和极小最小二乘 (MLS, Minimum Least-squares Method) 方法对含误差的地震面波模拟数据进行反演,通过结果的

\* 收稿日期:2013-05-02

基金项目:国家 863 计划项目(2013AA122502);国家自然科学基金面上项目(41174012,41274022)

作者简介:刘强,男,1985 年生,博士研究生。研究方向:地壳形变与地球动力学解释。E-mail:liuqiangjp@163.com

对比分析,说明地震面波反演问题中顾及测量误差的重要性。

2 算法简介

设线性方程组为

$$\mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{b}+\boldsymbol{\varepsilon}\tag{1}$$

其中  $\mathbf{A}$  为  $m\times n$  阶矩阵,  $\mathbf{x}$  为  $n$  维矢量,  $\mathbf{b}$  为  $m$  维矢量,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  为数据的观测误差。

传统的最小二乘方法是构建法方程

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^T\mathbf{b}\tag{2}$$

根据文献[3,4]。在最小二乘的准则下,首先利用 Lanczos 正交迭代在数据空间用  $m\times m$  阶的数据空间算子  $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$  构造矢量  $\mathbf{u}$ ,在模型空间用  $n\times n$  阶的模型空间算子  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  构造模型空间的矢量  $\mathbf{v}$ 。数据空间的初始矢量为  $\mathbf{u}_1=\frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|}$ ,模型空间的初始矢量为  $\mathbf{v}_1=\frac{\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{A}^T\mathbf{u}_1\|}$ ;然后通过 Givens 正交变换对构造的

矩阵进行 QR 分解,迭代计算逐步逼近最小二乘解。

而观测值是有误差的,实际的计算中最小二乘方法构建的法方程为:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{b}\tag{3}$$

加权最小二乘 QR 分解引入权的概念,可以区分观测值的精度差异,其在最小二乘 QR 分解基础上,在进行 Lanczos 正交迭代之前,通过矩阵分解将权矩阵  $\mathbf{P}$  分解为  $\mathbf{P}=\mathbf{P}^T\mathbf{P}'$ ,构造新的法方程:

$$\mathbf{A}^T\mathbf{P}'^T\mathbf{P}'\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}^T\mathbf{P}'^T\mathbf{P}'\mathbf{b}\tag{4}$$

设  $\mathbf{A}'=\mathbf{P}'\mathbf{A},\mathbf{b}'=\mathbf{P}'\mathbf{b}$ ,由矩阵的性质:  $(\mathbf{P}'\mathbf{A})^T=\mathbf{A}^T\mathbf{P}'^T$ ,式(4)可以写成

$$\mathbf{A}'^T\mathbf{A}'\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{A}'^T\mathbf{b}'\tag{5}$$

然后再进行 Lanczos 正交迭代, Givens 正交变换,迭代计算逐步逼近最小二乘解<sup>[5]</sup>。

对于线性方程组(3),当方程组为不相容方程组时,可采用极小最小二乘算法。对任意的  $\mathbf{b}\in R^m$ ,式(3)有唯一的极小最小二乘解  $\hat{\mathbf{x}}=(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^+\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{b}$ ,其中  $R^m$  为  $m$  维实向量空间,  $(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})^+$  是  $(\mathbf{A}^T\mathbf{P}\mathbf{A})$  的 Moore-Penrose 广义逆<sup>[6]</sup>。

3 算例设计分析

为说明数据处理过程中先验信息的重要性及先验信息对反演结果的影响,本文设计给出以下算例。

3.1 地震面波速度模型设计

设研究区域为平面研究区域,横坐标范围为 55~165 km,纵坐标范围为 -10~80 km。分为平面 11×9 个的网格,坐标原点(55,-10),网格间隔 10×10 km。设地震面波在白色网格的速度为 5 km/

s,在黑色网格速度为 3 km/s,黑白色网格交叉依次成棋盘状,共 99 个网格,编号为从左到右,从下到上依次编号为 1,2,⋯,99(图 1)。

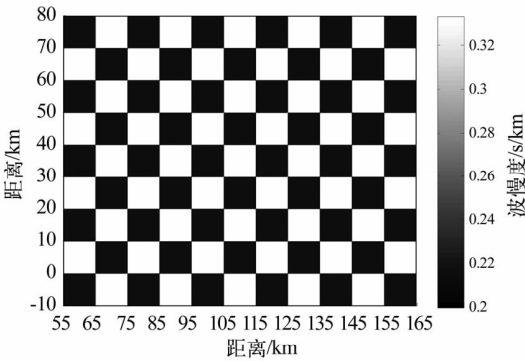
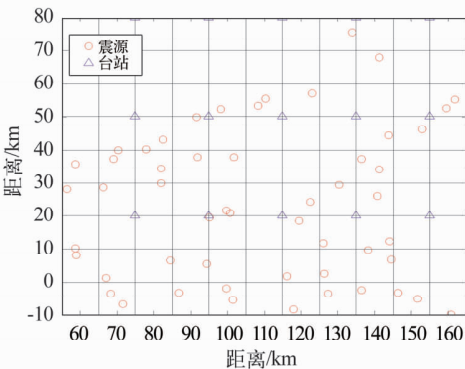


图 1 波慢度模型

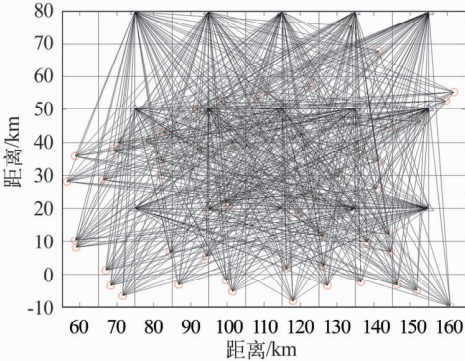
Fig.1 Wave slowness model

3.2 震源及台站的设计

选取 55°~165°N, -10°~80°E 范围内 2007-01-01—2009-01-01 日震级大于 5 级,震源深度小于 100 km 的 53 次地震,将其经纬度视为横纵坐标,1°按 1 km 强制置于本文设计的平面研究区域内,设 15 个台站也在研究区域内均匀分布如图 2(a)所示。理论上反演区域震源与台站之间有射线 53×15=815 条(图 2(b))。选取满足震源台站间距离大于 40 km 的射线 527 条。



(a) 震源及台站的设计



(b) 射线分布

图 2 震源台站分布

Fig.2 Distribution of designed earthquake source and the stations

3.3 模拟结果

得到各网格中的地震面波经过的射线长度矩阵  $A$ ,反演区域中射线上地震面波的总走时向量  $b$ ,以及地震面波在各网格中的波慢度向量。 $A$  中有 52 173 个元素,其中非零元素为 4 620 个。设  $A(i,j)$  表示第  $i$  条射线在  $j$  个网格中的射线长度; $b$  中有 99 个元素, $b(i)$  为第  $i$  条射线在反演区域中总的走时; $x$  中有 99 个元素, $x(i)$  为第  $i$  个网格的波慢度。显然有

$$Ax = b \tag{6}$$

现假设在实际计算  $b$  时,存在 1% 的相对于  $b$  的独立随机误差,则有

$$Ax = B + \varepsilon \tag{7}$$

4 反演结果对比

图 3 是反演结果,其中用 LSQR 方法计算反演得到理想模型的结果  $RAW$ (图 3(a));通过  $\varepsilon$  定权用 MLS 计算反演  $Ax = B$  得到结果如图 3(b);直接用 LSQR 方法计算反演  $Ax = B$  得到的结果如图 3(c);通过  $\varepsilon$  加权用 WLSQR 计算反演  $Ax = B$  得到的结果如图 3(d)。其中, $RAW$  作为反演得到的真值。

由图 3 可以看出,理想模型反演得到的结果

$RAW$  最好,MLS、LSQR 和 WLSQR 有差异,但差异不是很明显。我们分别将误差模型的 MLS 反演结果分别减去 LSQR 和 WLSQR 的反演结果得到 LSQR 和 WLSQR 的残差,以及将理想模型的 LSQR 反演结果当作真值分别减去 LSQR 和 WLSQR 的反演结果得到 LSQR 和 WLSQR 的残差如图 4 所示。

由图 4(a)、(b)可以看出,WLSQR 比 LSQR 的结果更接近 MLS 的结果。由图 4(c)、(d)看出 WLSQR 比 LSQR 的结果更接近 MLS 的结果。图中边缘区域有一些突跳点,是因为有些边缘区域的网络射线覆盖很差,甚至没有射线经过(图 2(b)),这些网络的最终反演的结果就会很差,出现突跳点。从图 3、4 也可以看出大多数网络由于射线覆盖较好,反演误差较小。

由图 5,将 LSQR 和 WLSQR 的残差画于同一图中,可以看出 WLSQR 的残差更集中。表 1 为两种方法的内外符合残差的统计结果。

由表 1 可以看出,不论与理想模型的反演真值  $RAW$  比较还是与考虑误差的 MLS 的反演结果比较,WLSQR 方法的结果明显优于 LSQR 的结果。

4 结语

本文算例仅是加入了 1% 的独立随机误差,就

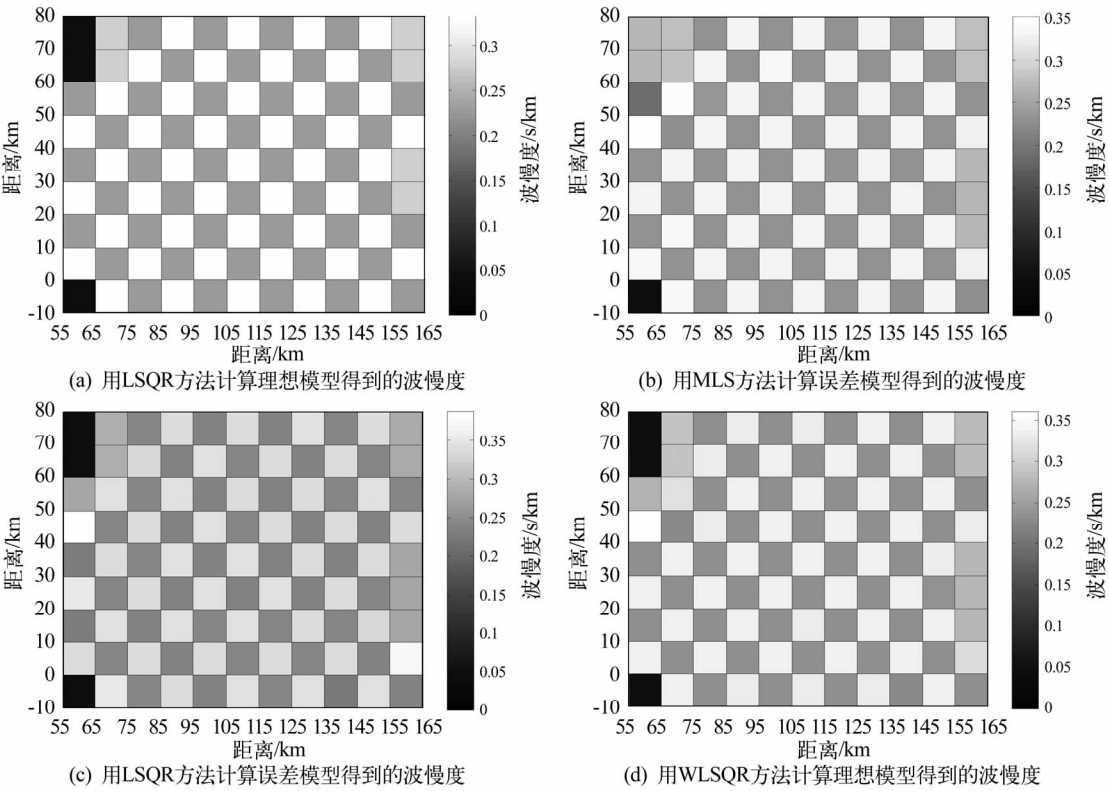


图 3 计算结果(单位:s/km)  
Fig. 3 Calculated results (unit: s/km)

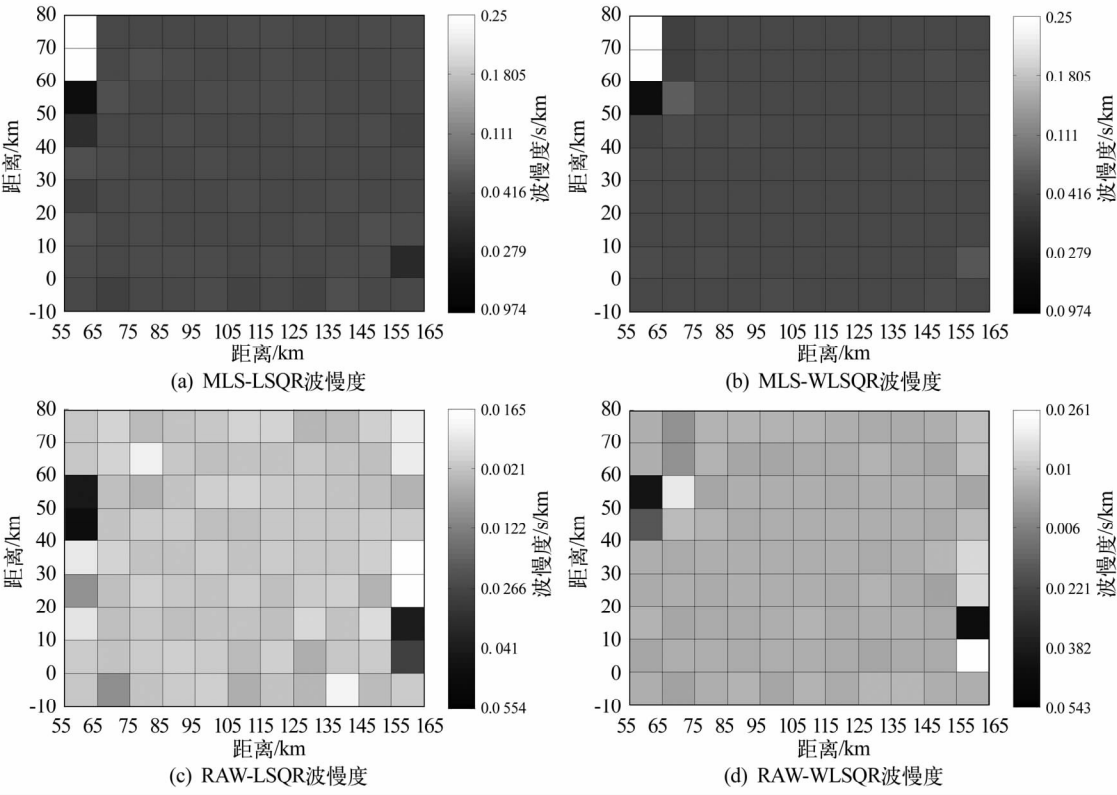


图 4 波慢度(单位:s/km)  
Fig.4 Wave slowness (unit: s/km)

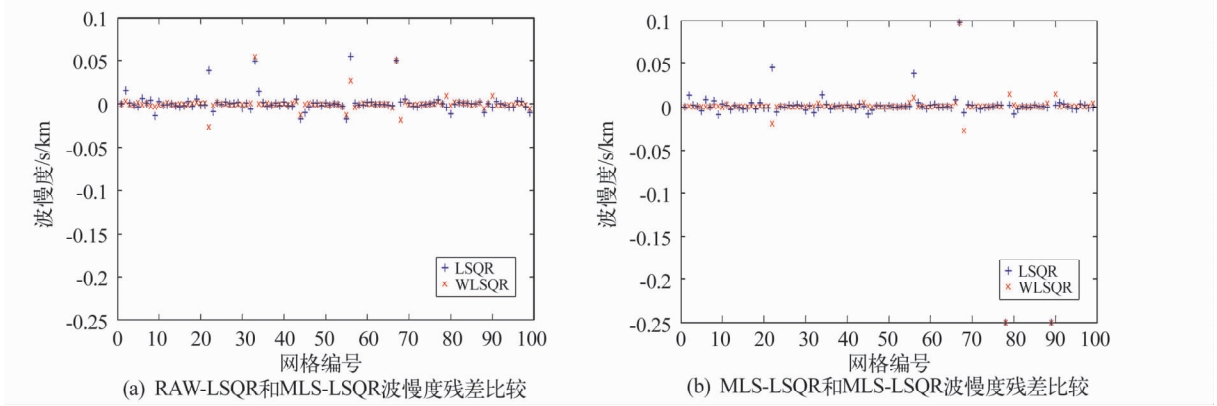


图 5 波慢度残差比较(单位:s/km)  
Fig.5 Comparison of wave slowness residual(unit: s/km)

表 1 波慢度残差比较(单位:s/km)  
Tab.1 Comparison of wave slowness residual( unit: s/km)

波慢度	最小值	最大值	平均值	中值	均方根
RAW-LSQR	-0.016 5	0.055 4	0.001 4	0	0.010 8
RAW-WLSQR	-0.026 1	0.054 3	0.000 672 93	-0.000 010 357	0.009 0
MLS-LSQR	-0.250 0	0.097 4	-0.003 2	0.000 147 23	0.037 6
MLS-WLSQR	-0.250 0	0.097 4	-0.003 9	0.000 005 237 6	0.037 1

可以清楚地看出考虑观测数据误差的 WLSQR 方法  
优于未考虑观测误差的 LSQR 方法。实际计算中误差可能大于 1%, 并且不一定是独立的误差, 此时更  
应该考虑观测误差以得到更准确的地震面波反演结果。  
(下转第 93 页)