第34卷第1期 大地测量与地球动力学 Vol. 34 No. 1
2014年2月 JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS Feb., 2014

文章编号:1671-5942(2014)01-0118-05

坐标转换中公共点粗差定位与降低粗差点影响方法研究[*1]

吴祖海　罗伟钊　李　军
(中南大学土木工程学院,长沙　410004)

摘　要　提出一种坐标转换公共点粗差定位和降低粗差点影响的新方法,即利用最小二乘平差后的方差,采用方差比值检验法,实现在布尔莎七参数计算过程中的粗差定位和剔除。并在公共点较少不适宜直接剔除的情况下,将假设检验与降权迭代计算结合,减弱粗差点的影响,提高了坐标转换的精度。算例证明了该方法的有效性。

关键词　坐标转换;布尔莎模型;公共点粗差;方差比值检验法;降权迭代

中图分类号:P207　　　**文献标识码**:A

ON POSITION OF GROSS ERRORS OF COMMON POINTS IN COORDINATE TRANSFORMATION AND REDUCING INFLUENCE OF GROSS ERRORS

Wu Zuhai, Luo Weizhao and Li Jun

(*School of Civil Engineering Central South University*, *Changsha*　410004)

Abstract　A method was presented in which variance after total least square adjustment and the variance ratio test are used to be used for position of gross errors of common points and reducing its influence in coordinate transformation with Burse-Wolf model. The method combined by hypothesis test with weight-reducing iteration can fit for the cases in which gross errors can not be eliminated directly. In this way, the influence of gross errors is reduced and the precision of coordinate transformation is improved. Some examples prove that this method is practical and effective.

Key words: coordinate transformation; Burse-Wolf model; gross errors of common points; method of variance ratio test; weight-reducing iteration

1　引言

GPS 定位使用的是 WGS84 坐标系,我国工程领域常用的坐标系有北京 54 坐标系、西安 80 坐标系、CGCS2000 坐标系和地方独立坐标系。故使用 GPS 技术建立控制网将遇到坐标转换的问题。布尔莎七参数模型是三维空间直角坐标转换常用的方法。运用布尔莎模型求解七参数时,没有考虑公共点本身存在的误差。若起算公共点存在粗差,将造成模型扭曲,出现错误的转换结果[1]。因此坐标转换首先要剔除起算数据中的粗差或者降低粗差的影响。

GPS 定位技术具有精度高稳定性好的优点,如

* 收稿日期:2013-08-18
基金项目:国家自然科学基金(41204024)
作者简介:吴祖海,男,1956 年生,副教授,硕士生导师,主要研究方向为道路与铁路工程测量、安全监测. E - mail: xic18@163.com

果外业操作按相关测量规范进行,可以认为整个网中 WGS84 坐标的精度较高[2]。而公共点中的地方坐标,由于坐标点的建立年代不一,来源不一,或者标石移动,精度可能参差不齐。诸如以上情形,起算公共点中可能混有粗差点。对于含有粗差的数据处理一般分为两种方法:将粗差归入函数模型[3]或将粗差归入随机模型[4,5]。选择适当的权函数,消除或者削弱粗差对参数估计的影响。这一类方法的困难在于合理权函数的选择,抗差的严密精度有待进一步研究[6]。

上述方法主要通过经最小二乘计算得到的改正数 V 来判定粗差。最小二乘法具有平均分配误差的能力,会导致粗差在平差改正数中的反映小于原始粗差量,并且第 i 个观测值的粗差不仅仅作用于第 i 个改正数 V,还影响其他的改正数[3]。直观表现就是含有粗差的公共点的改正数不一定会大,此时会造成误判粗差的情况。本文提出一种新方法,利用最小二乘平差后的方差构建统计量,克服了常规粗差定位中使用改正数 V 容易掩盖粗差的缺点,实现了在布尔莎七参数计算过程中的粗差定位和剔除。鉴于实际工程中用于坐标转换的起算公共点较少,在公共点不适宜直接剔除的情况下,结合假设检验与降权迭代计算两种方法,定位出粗差点并通过降权来削弱其影响,得到准确的坐标转换参数。

2 方差比值检验法

2.1 坐标转换数学模型

设 $\boldsymbol{A}$ 为目标坐标系,$\boldsymbol{B}$ 为源坐标系。考虑到三个欧拉角都非常小,因此布尔莎模型可简化为[7]:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_A = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_B + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_B & Y_B & X_B \\ 0 & 1 & 0 & Z_B & 0 & -X_B & Y_B \\ 0 & 0 & 1 & -Y_B & X_B & 0 & Z_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ m \end{bmatrix} \tag{1}$$

误差方程写成矩阵形式为:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L} \tag{2}$$

将 L 视作观测向量。则转换参数的估值为:

$$\hat{\boldsymbol{X}} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PL}) \tag{3}$$

由于各点的坐标可以视作是同精度独立观测值,因此 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$。然后可求得单位权中误差为:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}}{3n-7}} \tag{4}$$

式中 n 为公共点的个数。

2.2 方差比值检验法的原理

设有一批公共点对存在粗差,粗差造成转换后的中误差估值 $\hat{\delta}$ 膨胀。将所有公共点构成母体,求得中误差为 $\hat{\delta}_{(0)}$。去掉一对公共点的组合视为子样,求得中误差为 $\hat{\delta}_{(i)}$[8]。

构建统计量 F_i 算法流程如下:

1)利用所有公共点,构建误差方程

$$\boldsymbol{V}(0) = \boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{X}} - \boldsymbol{L} \tag{5}$$

利用普通最小二乘法求得转换参数,并得到初始中误差估值 $\hat{\delta}_{(0)}$。

2)此时不知道哪个已知点中的坐标是含有粗差的,逐个删除公共点对进行检验。对第 i 对点进行检验时,将第 i 对公共点删除,即第 i 对点不参与构成误差方程。得到不含第 i 个点平差的中误差 $\hat{\delta}_{(i)}$。

3)逐个去掉公共点对完成一轮计算,得到剔除了第 i 对公共点的 $\hat{\delta}_{(i)}(i=1,2,\cdots,n)$。如果母体含有粗差,该粗差恰好在第 i 对公共点上,则应有 $\hat{\delta}^2_{(0)} > \hat{\delta}^2_{(i)}$。进行如下统计检验:

$$H_0:\ \hat{\delta}^2_{(0)} = \hat{\delta}^2_{(i)} \tag{6}$$

$$H_1:\ \hat{\delta}^2_{(0)} > \hat{\delta}^2_{(i)} \tag{7}$$

针对每一对公共点,构建统计量[7]

$$F_i = \frac{\delta^2_{(0)}}{\delta^2_{(i)}} \tag{9}$$

F_i 服从 F 分布[8],即有:

$$F_i \sim F_{1-\alpha}(r_1, r_2) \tag{10}$$

式中 α 为显著性水平,r_1、r_2 为自由度,若参与平差的公共点对数为 n,则相应自由度为 $r = 3n-7$。

运用上述方法时,有两个值得注意的地方:

1)在多个粗差同时存在的情况下,为防止各个粗差相互干扰,特别是大粗差掩盖小粗差,每轮检验只剔除一个粗差点[9],即只对 $\hat{\delta}_{(i)}$ 最小的点进行检验。剔除一个粗差点后,再开始第二轮平差计算,剔除下一个粗差点,直至所有粗差被剔除。

2)显著性水平 α 的选取问题。如果 α 偏小,则发现粗差的能力偏低,会出现放过粗差的情况,犯统计假设的第二类错误。如果 α 偏大,则容易把不是粗差的点识别为粗差,犯统计假设的第一类错误。对于该检验方法,设置的显著性水平应该偏大。一是如果公共点含有粗差时,则必然有 $\hat{\delta}_{(i)}$ 会小于所有点参与平差的 $\hat{\delta}_{(0)}$,因此会是单侧检验;二是当公共点不含有粗差时,删除某个点对方差的影响很小,此时的统计量应分布于较小的概率区间[9]。因此可以适当增大显著性水平 α 以便发现所有粗差点。

3 降权迭代计算法

利用上述方法进行坐标转换粗差剔除时有时会带来一个问题,即实际工作中建立 GPS 网时,公共点的对数往往是比较少的,而布尔莎模型七参数转换要求公共点个数至少为三个。如果将探测出来的粗差点全部剔除,可能造成无法转换的情形,或者出现公共点全部集中在网的一侧或一角,这对整个网形的精度是不利的[8]。此时考虑一种将粗差点降权处理的方法,该方法与稳健估计类似,重新构建权函数来减小粗差点在坐标转换中的影响,而不是将粗差点直接剔除。

这种方法的思路是先利用方差比值检验法探测出粗差,然后根据权与方差成反比的定义,给予这些观测值一个相应较小的权进行下步平差迭代计算,逐步减小粗差值的影响。为达到上述目的,设置两个显著性水平,α_1 较大,α_2 略小,α_2 设置为剔除粗差的限值,α_1 与 α_2 之间则进行降权处理,α_1 以下则不作处理。根据多次试验,α_2 取为 0.05,α_1 取为 0.35。建立权函数如下:

$$p_i^{(v+1)}=\begin{cases}p_i^{(v)} & ,\ F_i<F_{1-\alpha_1}(r_1,r_2)),\text{且}\ p_i^{(1)}=1\\ \left(\dfrac{\hat{\delta}^2_{(i)}}{\hat{\delta}^2_{(0)}}\right)^{(v)}p_i^{(v)} & ,\ F_{1-\alpha_1}(r_1,r_2)<F_i<F_{1-\alpha_2}(r_1,r_2)\\ 0 & ,\ F_i>F_{1-\alpha_2}(r_1,r_2)\end{cases} \quad (11)$$

式中上标 v 表示的是迭代次数。

转换参数的估值公式化为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}^{(v)}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{L}) \quad (12)$$

在降权处理法中,粗差探测相当于第一次迭代计算。第一次计算时,所有公共点对是等权计算,由于粗差的影响,得到的结果是有偏估计。然后在各次迭代过程中不断变化公共点的权值,含有粗差的公共点的权逐步减小,从而降低这些点在平差中的贡献度,使有偏估计逐步接近无偏估计。

为减少计算量,对第一次平差计算后得到的统计量进行筛选,取 $\boldsymbol{F}_i$ 大于 1 所对应的坐标点进行检验。将这部分公共点看做疑似粗差点,迭代过程中仅对这部分点进行降权处理。

4 算例

4.1 用方差比值检验法剔除粗差

现取一 GPS 网数据进行分析。该网共 8 个公共点(表 1)。起初,公共点的精度都比较高,求得的坐标转换七参数及单位权中误差见表 3。然后在第三个点和第六个点的 x,y,z 坐标上加入 3 cm 的误差,第八个点 x,y,z 坐标上上加入 5 cm 的粗差,加入粗差后的坐标见表 2。利用最小二乘普通坐标转换方法求得的七参数见表 3。

表 1 不含粗差的公共点坐标(单位:m)

Tab. 1 Common coordinates without gross errors(unit:m)

点号	84 坐标系			54 坐标系		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	* * * *241.500	* * * *801.884	* * * *896.302	* * * *134.525	* * * *847.052	* * * *895.573
2	* * * *936.041	* * * *615.728	* * * *375.721	* * * *828.674	* * * *659.001	* * * *374.665
3	* * * *112.730	* * * *749.194	* * * *688.981	* * * *005.174	* * * *790.640	* * * *687.284
4	* * * *505.421	* * * *502.271	* * * *356.572	* * * *397.674	* * * *542.104	* * * *354.450
5	* * * *017.067	* * * *542.793	* * * *802.990	* * * *909.054	* * * *582.631	* * * *801.629
6	* * * *462.014	* * * *578.395	* * * *631.054	* * * *354.430	* * * *620.130	* * * *629.895
7	* * * *274.478	* * * *520.561	* * * *542.087	* * * *168.809	* * * *561.795	* * * *540.783
8	* * * *254.235	* * * *569.368	* * * *845.323	* * * *147.334	* * * *611.073	* * * *844.147

表 2 加入粗差后公共点在 54 坐标系中的坐标(单位:m)

Tab. 2 Coordinates with gross errors in BJZ54(unit:m)

点号	54 坐标系		
	X	Y	Z
3	* * * *005.144	* * * *790.610	* * * *687.254
6	* * * *354.400	* * * *620.100	* * * *629.865
8	* * * *147.384	* * * *611.123	* * * *844.197

利用方差比值检验法进行粗差探测,求得的统计量 F_i 如表 4。

表 3 坐标转换参数计算值

Tab. 3 Calculated coordinates transformation parameters

参数	不含粗差	加入 3 个粗差		
		普通最小二乘	剔除粗差	降权迭代
T_x/m	−9.404 5	−9.944 2	−9.443 0	−9.611 5
T_y/m	26.102 9	26.236 2	26.135 2	26.148 6
T_z/m	12.240 7	11.943 4	12.188 2	12.108 6
ω_x/(″)	0.513 9	0.504 3	0.512 0	0.509 7
ω_y/(″)	−1.219 9	−1.231 3	−1.221 0	−1.224 4
ω_z/(″)	3.509 0	3.522 1	3.509 7	3.514 1
m/ppm	−4.284 6	−4.309 1	−4.286 9	−4.292 3
$\hat{\delta}$	0.004 3	0.027 5	0.004 4	0.014 7

表 4　方差比值检验法的统计量

Tab. 4　Stastics of variance-ratio method

检验统计量	第一轮	第二轮	第三轮
F_1	0. 844 5	0. 892 5	0. 850 7
F_2	0. 827 4	0. 823 3	0. 742 0
F_3	1. 071 4	1. 313 3	12. 894 6
F_4	0. 836 4	0. 845 2	0. 836 0
F_5	0. 830 0	1. 005 5	0. 752 7
F_6	1. 246 2	1. 483 7	
F_7	0. 844 5	0. 884 9	0. 911 6
F_8	2. 000 8		
$F_{1-\alpha}(r_1,r_2)$	1. 435 5	1. 462 3	1. 627 5
定位的粗差点	8 号点	6 号点	3 号点

例中,取显著性水平 α 为 0. 25,通过三轮检验,第一轮探测时 $F_{0.75}(17,14)=1.435\ 5$,可以探测出 8 号点为粗差点;第二轮探测时 $F_{0.75}(14,11)=1.462\ 3$,可以探测出 6 号点为粗差点;第三轮探测时 $F_{0.75}(11,8)=1.627\ 5$,探测出 3 号点为粗差。剔除这三个点后,重新计算坐标转换参数及单位权中误差见表 3,此时计算出的坐标转换参数跟不含粗差时基本相同,中误差也很接近。可见运用该方法能识别公共点中的粗差,剔除粗差点后,坐标转换的精度得到显著提高。

4.2　降权迭代计算降低粗差影响

仍然用表 1 和表 2 中的数据。为便于发现粗差,设置显著性水平 α_2 为 0. 05,α_1 为 0. 35,由方差比值定权并进行迭代计算。

首次平差计算得到的统计量 F_i 如表 4 第一列所示。大于 1 的统计量对应的点有 3 号点,6 号点和 8 号点,因此只对这 3 个点进行检验并作降权处理。其中 $F_{0.65}(17,14)=1.232\ 9$,$F_{0.95}(17,14)=2.428\ 2$ 迭代 7 次后,达到终止条件。各次迭代得到的权值如表 5。

表 5　迭代计算得到的权值

Tab. 5　Weights calculated by iteration

点号	各次迭代得到的权值						
	$p^{(1)}$	$p^{(2)}$	$p^{(3)}$	$p^{(4)}$	$p^{(5)}$	$p^{(6)}$	$p^{(7)}$
3	1	1	0. 779 1	0. 779 1	0. 598 9	0. 598 9	0. 428 0
6	1	0. 802 4	0. 651 4	0. 520 4	0. 520 4	0. 338 2	0. 338 2
8	1	0. 499 8	0. 336 5	0. 252 0	0. 252 0	0. 163 4	0. 163 4

可见通过迭代,含有粗差的公共点的权值不断降低,其他点的权值仍为 1,权值也指出了粗差点的位置。终止迭代时得到的转换参数和中误差见表 3。

通过对比,降权迭代计算后得到的七参数与不含粗差时较为接近,中误差也有显著减小,七参数的精度有了提高,说明在不直接剔除粗差公共点的情况下,该方法明显优于普通最小二乘计算方法。

5　结论

1)本文提出的方差比值检验法,原理简单,公共点存在多维粗差时可以对粗差进行准确定位,用以提高坐标转换的精度;

2)在公共点对数较少的情况下,可以利用降权处理方法,将假设检验与降权迭代计算结合起来,降低粗差在坐标转换过程中的贡献度,使有偏估计逐步接近无偏估计,在保证坐标转换顺利进行的前提下,削弱粗差点的影响;

3)由于每次计算检验统计量都需要重新平差计算,计算工作量较大。但坐标转换的公共点数目往往不会很多,借助于计算机编程,该方法是完全可行的。在其他平差计算过程中,该方法的应用值得探讨。

参　考　文　献

1　陈义,陆珏. 以三维坐标转换为例解算稳健总体最小二乘方法[J]. 测绘学报,2012,(5):715 – 722. (ChenYi and Lu Jue. Performing 3D similarity transformation by robust total least squares[J]. Acta Geodaeticaet Cartographica Sinica,2012,(5):715 – 722)

2　郭英起,黄声享,曹先革. 基于稳健估计的高精度坐标转换参数解算方法[J]. 测绘工程,2008,(6):6 – 8. (Guo Yingqi, Huang Shengxiang and Cao Xiange. A method for calculating parameters with high accuracy in coordinate transformation based on robust estimation[J]. Engineering of Surveying And Mapping,2008,(6):6 – 8)

3　於宗俦,李明峰. 多维粗差的同时定位与定值[J]. 武汉测绘科技大学学报,1996,(4):17 – 23. (Yu Zongchou and Li Mingfeng. Simultaneous position and evaluation with multidimensional gross errors[J]. Journal of Wuhan Technical University of Surveing and Mapping,1996,(4):17 – 23)

4　周江文. 经典误差理论与抗差估计[J]. 测绘学报,1989,(02):115 – 120. (Zhou Jiangwen. Classical theory of errors and robust estimation[J]. Acta Geodaeticaet Cartographica Sinica,1989,(02):115 – 120)

5 郭英起,等. 基于空间直角坐标系的高精度坐标转换方法研究[J]. 大地测量与地球动力学,2012,(3):125-128.(Guo Yingqi,et al. Study on coordinate transformation method with high accuarcy based on space rectangular coordinates system[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2012,(3):125-128)

6 李德仁,袁修孝. 误差处理与可靠性理论[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002.(Li Deren and Yuan Xiuxiao. Error processing and reliability theory[M]. Wuhan:Wuhan University Press,2002)

7 武汉大学测绘学院测量平差科学组. 误差理论与测量平差基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2003.(Surwey Adjustment Discipline Unit of Surveying and Mapping College of Wuhan University. Basis of error theory and adjustment [M]. Wuhan: Wuhan University Press,2003)

8 李金生. GPS 网基线解算质量控制及基准点可靠性检验[D]. 东北大学,2008.(Li Jinsheng. Quality control of baseline solution and reliableexamination of datum points in GPS network[M]. Northeastern University,2008)

9 高北晨,杨腾峰. 多维粗差的逐步剔除[J]. 铁路航测,1997,(1):6-8.(Gao Beichen and Yang Tengfeng. Gradually eliminating of multimensional gross errors[J]. Railway Investigation and Surveying,1997,(1):6-8)

附件

根据抗差等价加权原理[4],坐标转换误差方程为:

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{L} \tag{1}$$

最小二乘估计准则为:

$$\sum_{i=1}^{k}p_i v_i^2=\min \tag{2}$$

但最小二乘估计的抗差能力很差,于是采用抗差稳健估计,估计准则如下:

$$\sum_{i=1}^{k}p_i\rho(v_i)=\sum_{i=1}^{k}p_i\rho(a_i\hat{x}-l_i)=\min \tag{3}$$

对 $\hat{x}$ 求一阶导数,并令其为 0,得到:

$$\sum_{i=1}^{k}p_i\frac{\partial\rho(v_i)}{\partial v}a_i=0 \tag{4}$$

令

$$\rho'(v_i)=\frac{\partial\rho(v)}{\partial v} \tag{5}$$

式(4)可化为:

$$\sum_{i=1}^{k}p_i\rho'(v_i)a_i=0 \tag{6}$$

记

$$\frac{\rho'(v_i)}{v_i}=w_i,p_iw_i=\bar{p}_i$$

则式(6)可化为

$$\sum_{i=1}^{k}\bar{p}_iv_ia_i=0 \tag{7}$$

写成矩阵形式,为:

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{P}\boldsymbol{V}=0 \tag{8}$$

其中 $\bar{P}$ 为等价权函数,为了表述方便,记 $\bar{P}$ 为 $P^{(v)}$,则可以得到参数的估值为:

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{(v)}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{(v)}l \tag{9}$$

常规方法中多使用改正数 v 定位粗差,但最小二乘法具有平均分配粗差能力,改正数 V 容易掩盖粗差。因此利用最小二乘平差后的方差构建统计量,实现粗差定位和剔除。鉴于实际工程中用于坐标转换的起算公共点较少,在公共点不适宜直接剔除的情况下,结合假设检验与降权迭代计算两种方法,定位出粗差点并通过降权来削弱其影响,得到准确的坐标转换参数。

当采用方差比值检验法求取坐标转换参数时,论文利用假设检验原理,直接剔除粗差点。

当采用降权迭代计算方法时,构建新的权函数如下:

$$p_i^{(v+1)}=\begin{cases}p_i^{(v)} & ,\ F_i<F_{1-\alpha_1}(r_1,r_2)),且\ p_i^{(1)}=1\\ \left(\dfrac{\hat{\delta}_{(i)}^2}{\hat{\delta}_{(0)}^2}\right)^{(v)}p_i^{(v)} & ,\ F_{1-\alpha_1}(r_1,r_2)<F_i<F_{1-\alpha_2}(r_1,r_2)\\ 0 & ,\ F_i>F_{1-\alpha_2}(r_1,r_2)\end{cases} \tag{10}$$

利用迭代最终的权矩阵,通过式(9)求取坐标转换参数,削弱粗差点的影响。