

基于非迭代与迭代法联合估计的七参数坐标
转换方法研究^{* 1}

谭骏祥 李少达 杨容浩
(成都理工大学地球科学学院,成都 610059)

摘 要 针对七参数模型非迭代解法比较稳健,但精度较低;迭代解法精度较高,但收敛性易受初始值的影响,提出一种联合估计七参数的方法。该方法解决了传统方法不适用于大旋转角的难题,具有收敛速度快,求解精度高等特点,因不需要迭代初始值而能应用于任意角度转换的七参数空间直角坐标转换模型。并通过实测算例验证了该方法的正确性与有效性。

关键词 坐标转换;七参数;欧拉角;SVD;单位四元数;对偶四元数

中图分类号:P207;P226⁺³ **文献标识码**:A

STUDY ON SEVEN-PARAMETER COORDINATE TRANSFORMATION
MODEL BASED ON COMBINED ESTIMATION OF NON-ITERATION
AND ITERATION

Tan Junxiang, Li Shaoda and Yang Ronghao
(College of Earth Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059)

Abstract Estimation of seven-parameter model by non-iterative method is relatively stable, but accuracy is lower; accuracy of estimation by iterative method is higher, but its iteration convergence is vulnerable to the initial value. A method estimating seven-parameter model by the combination of non-iterative with iterative method was proposed. The new method resolves the problem that the iterative methods is unsuitable for large rotation angle. Convergence in estimation by the new method is fast and accuracy is higher, and it can be applied to cartesian coordinate with arbitrary conversion because of not required initial values. The checking calculation for some cases proves the method is correct and effective.

Key words: coordinate transformation; seven parameters; Euler angle; SVD; unit quaternion; dual quaternion

1 引言

空间直角坐标转换常采用七参数模型^[1],针对七参数模型的参数求解,大致分为迭代解和非迭代解法两类。根据旋转矩阵求解方法不同,非迭代解法一般采用 SVD 分解法^[2]、正交矩阵法^[3]、单位四

元数法^[4]、对偶四元数法^[5]等;根据旋转矩阵表达方式不同,迭代解法常使用欧拉角形式^[6]、正交矩阵形式^[7]和四元数形式^[8]。

在已有七参数模型求解方法的基础上,本文首先简述了迭代解法与非迭代解法,然后通过实测数

* 收稿日期:2013-09-14
基金项目:四川省教育厅科研项目(12ZB012);四川省科技支撑计划(2013FZ0021);国家自然科学基金(41201440/D010702)
作者简介:谭骏祥,男,1989年生,硕士生,主要从事地面激光扫描点云数据处理研究。E-mail: tanjunxiang89@163.com

据对比分析了两类解法的优缺点,进而提出联合两类解法来估计七参数,以期实现任意旋转角度的稳健高精度空间直角坐标转换。

2 模型的表示与算法评价

2.1 模型表示

据研究,一般化的三维坐标转换非线性模型为:

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_0 + \mathbf{sR}\mathbf{v}_S \quad (1)$$

式中, $\mathbf{v}_S = [x, y, z]^T$ 和 $\mathbf{v}_T = [X, Y, Z]^T$ 分别表示待转换坐标和目标坐标, $\mathbf{v}_\theta = [\Delta X, \Delta Y, \Delta Z]^T$ 为平移向量, $\mathbf{x} = [\Delta X, \Delta Y, \Delta Z, s, \varphi, \theta, \gamma]^T$ 为七参数向量, s 为尺度参数, \mathbf{R} 为旋转矩阵。 \mathbf{R} 绕 z, x, y 轴旋转 φ, θ, γ 后组成的序列为:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\varphi\cos\gamma - \sin\varphi\sin\theta\sin\gamma & -\sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\gamma + \sin\varphi\sin\theta\cos\gamma \\ \sin\varphi\cos\gamma + \cos\varphi\sin\theta\sin\gamma & -\cos\theta\sin\gamma & \sin\varphi\sin\gamma - \cos\varphi\sin\theta\cos\gamma \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\theta & \cos\theta\cos\gamma \end{bmatrix} \quad (2)$$

假定 e 为随机误差且 $e \sim N(0, \sigma^2)$, 则两个坐标系中相对应的控制点的关系为:

$$\mathbf{v}_{T,i} = \mathbf{v}_{\text{object}} + \mathbf{sR}\mathbf{v}_{S,i} + \mathbf{e}_i \quad (3)$$

式中 $i = 1, 2, \dots, M, M$ 为控制点的个数。

为了减小求解过程中坐标值的有效位数,提高计算过程的精度,对模型进行重心化处理,得

$$\mathbf{v}'_{T,i} = \mathbf{v}'_{\text{object}} + \mathbf{sR}\mathbf{v}'_{S,i} + \mathbf{e}_i \quad (4)$$

式中 $\mathbf{v}'_{T,i} = \mathbf{v}_{T,i} - \bar{\mathbf{v}}_T$, $\mathbf{v}'_{S,i} = \mathbf{v}_{S,i} - \bar{\mathbf{v}}_S$ ($\bar{\mathbf{v}}_S$ 和 $\bar{\mathbf{v}}_T$ 分别表示重心坐标 ($\bar{\mathbf{v}}_S = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{S,i}$, $\bar{\mathbf{v}}_T = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \mathbf{v}_{T,i}$, $\mathbf{v}'_{\text{object}} = \mathbf{v}_{\text{object}} - \bar{\mathbf{v}}_T + \mathbf{sR}\bar{\mathbf{v}}_S$))。

2.2 算法评价

使用均方根误差 (RMSE, Root Mean Square Error) 度量转换后坐标与目标坐标的接近程度,即

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_i \|\bar{\mathbf{v}}_{T,i} - \hat{\mathbf{v}}_0 - \hat{\mathbf{sR}}\mathbf{v}_{S,i}\|^2}{M}}$$

式中 $\bar{\mathbf{v}}_{T,i}$ 表示转换后的实际坐标值, $\hat{\mathbf{v}}_0, \hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{R}}$ 表示参数估值, M 为控制点个数。 $RMSE$ 越小,表明转换精度较高,反之,则转换精度较低。

由于七参数的真值未知,我们根据转换残差来判断求解的准确性。若 $RMSE$ 超过限差值 e 时,即 $RMSE > e$,则认为七参数的估计值 $\hat{\mathbf{x}}$ 错误,模型求解不准确。需要指出的是,实际坐标转换中的尺度参数估值 \hat{s} 常接近 1,否则,也会认为求解错误。

3 模型的最小二乘估计

3.1 非迭代解法

利用最小二乘,根据式 (4) 得目标函数 $\min \sum_{i=1}^M$

$\|\mathbf{v}'_{T,i} - \mathbf{sR}\mathbf{v}'_{S,i} - \mathbf{v}'_{\text{object}}\|^2$, 展开后得:

$$\min \sum_{i=1}^M \|\mathbf{v}'_{T,i} - \mathbf{sR}\mathbf{v}'_{S,i}\|^2 - 2\mathbf{v}'_{\text{object}} \sum_{i=1}^M (\mathbf{v}'_{T,i} - \mathbf{sR}\mathbf{v}'_{S,i}) + M \|\mathbf{v}'_{\text{object}}\|^2 \quad (5)$$

使用式 (5) 进行非迭代解法估计参数的分步求解,求解过程为:求尺度参数 \rightarrow 旋转矩阵 \rightarrow 平移向量。其中尺度参数 s 的求解式为:

$$\hat{s} = \left(\sum_{i=1}^M \|\mathbf{v}'_{T,i}\|^2 / \sum_{i=1}^M \|\mathbf{v}'_{S,i}\|^2 \right)^{1/2}$$

求解旋转矩阵 \mathbf{R} 常用的是单位四元数法,根据单位四元数法,先计算 N

$$N = \begin{bmatrix} D_{xx} + D_{yy} + D_{zz} & D_{yz} - D_{zy} & D_{zx} - D_{xz} & D_{xy} - D_{yx} \\ D_{yz} - D_{zy} & D_{xx} - D_{yy} - D_{zz} & D_{xx} + D_{yx} & D_{zx} + D_{xz} \\ D_{zx} - D_{xz} & D_{xy} + D_{yx} & -D_{xx} + D_{yy} - D_{zz} & D_{yz} + D_{zy} \\ D_{xy} - D_{yx} & D_{zx} + D_{xz} & D_{yz} + D_{zy} & -D_{xx} - D_{yy} + D_{zz} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中 $D_{xx} = \sum_i \mathbf{v}'_{T,i} \mathbf{v}'_{S,i} (\mathbf{v}'_{T,i}$ 表示点 v 的 x 轴分量), 则可依此类推出 $D_{xy}, D_{xx}, D_{yy}, D_{yz}, D_{zz}$ 等符号的数值。

根据最大特征值对应的单位特征向量 $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]$,

$$\hat{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

最后,求得平移向量 $\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}}_T - \hat{\mathbf{sR}}\bar{\mathbf{v}}_S$ 为 $\hat{\mathbf{v}}_0 = \bar{\mathbf{v}}_T - \hat{\mathbf{sR}}\bar{\mathbf{v}}_S$; 在对偶四元数法中,能同时求得 \mathbf{R} 和 \mathbf{v}_0 。

3.2 迭代解法

式 (4) 按泰勒级数展开取至 1 次项得:

$$\mathbf{v}'_{T,i} + d\mathbf{v}'_{T,i} = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{sR}\mathbf{v}'_{S,i} + d\mathbf{v}'_0 + \mathbf{R}\mathbf{v}'_{S,i} ds + s d\mathbf{R}\mathbf{v}'_{S,i} + \mathbf{e}_i \quad (8)$$

式中 $\mathbf{v} = \mathbf{B}\mathbf{x} - \mathbf{l}$, 其中 $\mathbf{v} = [d\mathbf{v}_{T,1}, d\mathbf{v}_{T,2}, \dots, d\mathbf{v}_{T,M}]^T$, $\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_M]^T$, $\mathbf{B}_i = [\mathbf{I}_3, \mathbf{R}\mathbf{v}_{S,i}, s\mathbf{v}_{S,i}]$, $\mathbf{l} = [\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_M]^T$, $\mathbf{l}_i = \mathbf{v}_{T,i} - \mathbf{v}_0 - \mathbf{sR}\mathbf{v}_{S,i}$, \mathbf{I}_3 表示 3 阶单位矩阵, \mathbf{x} 为所求未知数改正数。由于 \mathbf{R} 有欧拉角、正交矩阵和四元数等 3 种表达形式,而欧拉角形式有 3 个,正交矩阵形式有 9 个,四元数形式有 4 个。而表达旋转只需要 3 个必要参数,因此正交矩阵形式需要 6 个约束条件,四元数形式只需 1 个约束条件。

1) 正交矩阵形式

将 \mathbf{R} 看成由 9 个元素组成的矩阵: $\mathbf{R} =$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \text{由 } \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \text{ 得 6 个约束条件为:}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 &= 1; b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1; c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1 \\ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 &= 0; a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0; \\ a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

2) 四元数形式

设单位四元数 $\boldsymbol{q} = [a, b, c, d]$, 构造旋转矩阵为:

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 - 2(b^2 + c^2) & 2(ab - dc) & 2(ac + db) \\ 2(ab + bc) & 1 - 2(a^2 + c^2) & 2(bc - da) \\ 2(ac - db) & 2(bc + da) & 1 - 2(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

约束条件为 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ 。

式(8)表示的七参数线性化模型使用间接平差方法可求得 $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{B}^T \boldsymbol{B})^{-1} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{l}$ 。由于按泰勒级数展开进行线性化会产生误差, 因此采用迭代运算, 迭代过

程直至迭代前后两次 \boldsymbol{x} 之差小于某一微小量为止。

4 算法对比

为了验证七参数求解方法的精度和准确性, 坐标转换实验采用两组实测数据进行。第一组数据的控制点转换前后坐标系分别为 WGS84 和西安 80 坐标系(表 1), 覆盖范围比较大, 最远两控制点间隔约 80 千米, 但两个坐标的旋转角度相对较小。第二组数据的控制点来自具有一定重叠度的两站激光扫描数据(表 2), 范围很小, 但旋转角度比较大。

表 1 第一组数据的控制点坐标(单位:m)

Tab.1 Coordinates of control points of the first set data(unit: m)

点名	WGS84			西安 80		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	-827 694.445	6 419 426.449	4 313 723.898	-797 503.240	6 431 355.822	4 313 735.722
2	-812 774.937	6 423 357.347	4 317 055.994	-782 561.047	6 435 200.077	4 317 067.962
3	-811 642.108	6 432 680.066	4 302 157.110	-781 373.901	6 444 515.909	4 302 168.803
4	-807 743.964	6 443 167.811	4 287 043.936	-777 414.705	6 454 980.729	4 287 055.385
5	-823 117.930	6 427 335.227	4 303 523.832	-792 880.706	6 439 237.808	4 303 535.497
6	-801 418.002	6 439 820.036	4 296 906.385	-771 108.327	6 451 596.330	4 296 918.019
7	-799 171.810	6 451 649.587	4 278 398.332	-768 793.261	6 463 412.545	4 278 409.686
8	-769 504.452	6 456 338.318	4 289 970.385	-739 098.984	6 467 929.001	4 289 982.058
9	-754 048.312	6 458 288.278	4 296 936.297	-723 631.694	6 469 789.240	4 296 948.162

表 2 第二组数据的控制点坐标(单位:m)

Tab.2 Coordinate of control points of the second set data(unit:m)

点名	第一站			第二站		
	X	Y	Z	X	Y	Z
1	2.622	-1.387	0.156	-2.652	1.277	-0.408
2	9.841	15.038	1.336	-9.615	-13.913	6.217
3	-10.814	-1.699	6.421	10.545	4.141	5.727
4	-8.005	3.632	-1.849	8.130	-3.817	-0.240
5	10.407	-0.424	2.355	-10.494	0.910	1.767

实验中, 非迭代解法不需要设置参数; 迭代求解中 7 参数的近似值是未知的, 分别设置 v_0 、 u 和旋转角度的初始值为 $[0, 0, 0]^T$ 、1 和 $[0, 0, 0]^T$, 设置最大迭代次数为 300(表 3、4)。

从表 3 看, 对于小角度的坐标转换, 非迭代解法与迭代解法均能求得转换参数的正确估计值, 其中非迭代解法的正交矩阵法的迭代次数最少, 求解精度最高。从表 4 看, 对于角度较大的坐标转换, 非迭代解法仍然能求得转换参数的正确估值, 可迭代解法不能够收敛至正确的值。由表 3、4 可见: 非迭代解法不需要迭代, 均能收敛至正确的解, 但精度可能不如迭代解法高; 迭代解法需要迭代求解, 可收敛至更高精度, 但当旋转角度过大时易收敛至错误解。

5 联合估计七参数

非迭代解法采用分步求解七参数, 不需要迭代,

表 3 第一组数据的求解结果对比

Tab.3 Comparison of solutions of the first set data

求解结果	SVD 分解法	正交矩阵法	单位四元数法	对偶四元数法	欧拉角形式	正交矩阵形式	四元数形式
$\Delta X(\text{m})$	-7 071.100 269	-7 071.100 269	-7 071.100 269	-7 071.100 266	-7 070.999 26	-7 635.932 639	-7 071.090 535
$\Delta Y(\text{m})$	7 109.533 743	7 109.533 743	7 109.533 743	7 109.533 740	7 109.419 21	8 532.259 144	7 109.495 478
$\Delta Z(\text{m})$	65.589 905	65.589 905	65.589 905	65.589 910	65.779 564	582.509 829	65.676 166
$\varphi(^{\circ})$	0.005 810	0.005 810	0.005 810	0.005 810	0.005 810	0.005 751	0.005 810
$\theta(^{\circ})$	0.000 014	0.000 014	0.000 014	0.000 014	0.000 014	-0.000 077	0.000 014
$\gamma(^{\circ})$	0.000 010	0.000 010	0.000 010	0.000 010	0.000 010	-0.000 026	0.000 010
尺度参数	1.000 009	1.000 009	1.000 009	1.000 009	1.000 009	0.999 940	1.000 009
迭代次数	0	0	0	0	8	4	5
RMSE(mm)	19.409 144	19.409 144	19.409 144	19.409 143	19.412 359	18.558 738	19.405 339

表 4 第二组数据的求解结果对比

Tab.4 Comparison of solutions of the second set data

求解结果	SVD 分解法	正交矩阵法	单位四元数法	对偶四元数法	欧拉角形式	正交矩阵形式	四元数形式
$\Delta X(\text{m})$	0.000 097	0.000 097	0.000 097	0.000 097	0.812 460	-0.001 484	0.318 426
$\Delta Y(\text{m})$	-0.001 034	-0.001 034	-0.001 034	-0.001 034	-3.380 926	-0.002 424	0.098265
$\Delta Z(\text{m})$	0.000 697	0.000 697	0.000 697	0.000 697	3.756 081	0.001 727	3.427 754
$\varphi(^{\circ})$	3.110 432	3.110 432	3.110 432	3.110 432	-1.960 000	-0.031 135	-0.239 827
$\theta(^{\circ})$	0.355 220	0.355 220	0.355 220	0.355 220	-1.240 962	-0.355 758	0.053 799
$\gamma(^{\circ})$	0.038 862	0.038 862	0.038 862	0.038 862	-2.476 473	-3.103 217	0.092 201
尺度参数	1.000 011	1.000 011	1.000 011	1.000 011	-0.638 663	-0.999 938	-1.001 812
迭代次数	0	0	0	0	99	13	36
$RMSE(\text{mm})$	3.217 380	3.217 380	3.217 380	3.217 380	860.974 153	1.440 748	470.153 714

在大小旋转角度下均能获得正确估值,但没有考虑同时包含七参数的误差模型,精度可能较低;迭代解法采用同时求解七参数,并通过迭代的方式逐步逼近最佳待求解参数,不足之处在于迭代的收敛性易受初始值的影响,不适用于大旋转角的坐标转换。针对两类解法的优缺点,提出联合两类解法来估计七参数,具体步骤为:

- 1)使用非迭代解法求解转换前坐标 v_s 至转换后坐标 v_T 的初始转换参数 x_{ini} ,包括旋转矩阵 R_{ini} (或旋转角度 $\varphi_{ini},\theta_{ini},\gamma_{ini}$)、尺度参数 s_{ini} 和平移向量 v_{0ini} ;
- 2)根据式(1),利用 x_{ini} 将 v_s 转换至 v_{Tini} ,此时 v_{Tini} 与 v_T 已经相当接近;
- 3)设置 v_0 、 u 和旋转角度的初始值为 $[0,0,0]^T$ 、 1 和 $[0,0,0]^T$,利用迭代解法求解 v_{Tini} 至 v_T 的转换参数 x_{end} ;
- 4)根据式(1),利用 x_{end} 将 v_{Tini} 转换至 v_T ,完成坐标转换。

求解中,分别联合常用的非迭代解法单位四元数法与三种迭代解法估计七参数,即将单位四元数法的解作为迭代解法的初始值进行迭代求解,于是产生三种联合解法。利用表 1、2 数据的联合求解结果见表 5、6。

表 5 第一组数据的联合求解结果

Tab.5 The results of combined estimation for the first set of data

求解结果	欧拉角形式	正交矩阵形式	四元数形式
$\Delta X(\text{m})$	-7 070.999 271	-7635.932 639	-7 071.090 535
$\Delta Y(\text{m})$	7 109.419 195	8532.259 144	7 109.495 478
$\Delta Z(\text{m})$	65.779 561	582.509 829	65.676 166
$\varphi(^{\circ})$	0.005 810	0.005 751	0.005 810
$\theta(^{\circ})$	0.000 014	-0.000 077	0.000 014
$\gamma(^{\circ})$	0.000 010	-0.000 026	0.000 010
尺度参数	1.000 009	0.999 940	1.000 009
迭代次数	5	3	7
$RMSE(\text{mm})$	19.412 359	18.558 738	19.405 338

表 6 第二组数据的联合求解结果

Tab.6 The results of combined estimation for the second set of data

求解结果	欧拉角形式	正交矩阵形式	四元数形式
$\Delta X(\text{m})$	0.000 195	-0.001 484	0.000 119
$\Delta Y(\text{m})$	-0.001 386	-0.00 242	-0.00 0897
$\Delta Z(\text{m})$	0.000 422	0.001 726	0.001 304
$\varphi(^{\circ})$	3.110 425	3.110 458	3.110 432
$\theta(^{\circ})$	0.355 355	0.355 758	0.355 286
$\gamma(^{\circ})$	0.038 905	0.038 375	0.038 879
尺度参数	1.000 011	0.999 938	0.999 719
迭代次数	19	5	6
$RMSE(\text{mm})$	3.332 045	1.440 748	3.118 144

由表 5、6 可见,两组数据均能获得正确的结果,体现了此方法的正确性。其中,正交矩阵的迭代次数最少,并且能获得最高的转换精度,四元数形式次之,欧拉角的效果最差。与表 3、4 相比较,联合解法的精度几乎高于非迭代解法,在大旋转角度下也能获得正确的估计值。

6 结 论

为了解决非迭代解法精度较低,收敛性易受初始值的影响、不适用于大旋转角坐标转换的问题,本文提出联合两类解法来估计七参数。通过算例验证了联合解法的准确性与有效性,其中 MatrixUQ 的迭代次数最少,转换后的坐标与目标坐标最接近。本文提出了一种不需迭代初始值而能应用于任意角度转换的联合估计七参数方法,但并没有将其与非线性最小二乘^[9]等求解方法作对比分析,还有待进一步完善。

参 考 文 献

1王之卓. 摄影测量原理[M]. 北京:测绘出版社. 1990. (Wang Zhizhuo. Principle of photogrammetry[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press,1990)

2Arun K S,Huang T S and Blostein S D. Least-square fitting of two 3D point sets[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1987,9(5): 698-700.