

文章编号:1671-5942(2014)03-0151-04

GOCE 梯度数据坐标系转换及误差分析^{* 1}

苏 勇 范东明 黄 强

(西南交通大学地球科学与环境工程学院,成都 611756)

摘要 分析逐点旋转法模型转换过程中误差对转换结果的影响,给出了梯度张量的转换策略。处理结果表明,GOCE 的姿态误差满足设计要求,但 GOCE 梯度张量观测数据质量非常差,包含大量的低频有色噪声,在转换前需要对观测数据进行滤波处理,且采用“移去-恢复”方法能显著提高梯度数据的转换精度。

关键词 GOCE 卫星;引力梯度;梯度张量转换;逐点旋转法;误差分析

中图分类号:P223.0

文献标识码:A

COORDINATE SYSTEM CONVERSION OF GOCE GRADIENTS DATA AND ERROR ANALYSIS

Su Yong, Fan Dongming and Huang Qiang

(Faculty of Geoscience and Environment Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756)

Abstract The gravitational gradients along the orbit observed by GOCE satellite is given in the gradiometer coordinate system (GRF) while the Earth's gravity field model from gradients is generally in non-instrument coordinate system. Due to GOCE can not measure full tensor gradient efficiently, it is necessary to replace V_{XY} 、 V_{YZ} as model values and to converse coordinate system of gradient. Therefore, in the rotation process, the error of the gradients data and the error of the rotation matrix have be taken into account. A pointwise rotation model of gradients in various coordinate systems and analysis the impact of various errors in conversion process of gradients were described, and gradients tensor rotation strategy is discussed simultaneously. Actual processing results show that the attitude error of the GOCE meets the design requirements, but the quality of GOCE gradients tensor, is not good for containing a large number of low-frequency colored noises, which needs to filter before conversion. In addition, “remove-restore” method can significantly improve the accuracy.

Key words: GOCE satellite; gravitational gradient; tensor rotation; point-wise rotation; error analysis

目前,有多个机构正致力于利用 GOCE 观测数据恢复地球重力场^[1-3]。于锦海等^[4-5]采用张量不变量法反演得到了相应的 GOCE 重力场模型。利用张量不变量法解算地球重力场模型对梯度数据所在的坐标系没有要求,研究的主要对象是梯度张量的不变量,从理论上讲不需要考虑梯度数据的坐标转

换问题。但由于 GOCE 卫星梯度仪设计的原因,GOCE 只能有效给出 V_{XX} 、 V_{YY} 、 V_{ZZ} 、 V_{XZ} 四个高精度的梯度分量,而无法有效给出 V_{XY} 、 V_{YZ} 两个低精度的梯度分量,因此 GOCE 任务无法获取全张量梯度数据。一个直观简单的解决办法是利用已有重力场模型模拟两个低精度的梯度分量,并替换掉观测值。但问

* 收稿日期:2013-09-26

基金项目:高等学校博士学科点专项科研基金项目(2012018412006);中央高校基本科研业务费专项资金项目(SWJTU10ZT02, SWJTU12BR012);西南交通大学博士研究生创新基金项目。

作者简介:苏勇,男,1987 年生,博士研究生,主要研究方向为卫星重力测量。E-mail:suyongme@foxmail.com。

题是,无法直接模拟梯度仪坐标系 GRF 中的梯度分量,需要将模拟的其他坐标系中的梯度分量转换到 GRF 中,梯度张量数据坐标系的转换问题无法回避。同时,文献[4,6]的研究结果表明,张量不变量法对卫星的姿态控制还是有要求的。文献[7~12]的研究结果表明,逐点旋转法的转换效果要优于最小二乘配置法。

利用梯度数据反演地球重力场模型一般有两种策略^[13]:1) 观测数据适应函数模型,将 GRF 中的梯度数据转换到其他所需的坐标系中;2) 函数模型适应观测数据,将函数模型转换到观测数据所在的坐标系中。由于重力场位系数大多数情况下是在 ERF、IRF 或 LNOF 中解算得到的,但 GOCE 获取的是 GRF 中的梯度数据,因此 GOCE 卫星梯度数据坐标系的转换就显得很有必要。本文将主要研究梯度数据或函数模型在各个坐标系中转换的逐点旋转法。

1 逐点旋转法模型

利用逐点旋转法将梯度张量由一个直角坐标系转换到另一个直角坐标系的广义函数模型为^[9~10,14~15]:

$$\mathbf{V}_{ab} = \mathbf{R} \mathbf{V}_{ij} \mathbf{R}^T \quad (1)$$

展开后可得:

$$\begin{bmatrix} V_{XX}^{ab} \\ V_{YY}^{ab} \\ V_{ZZ}^{ab} \\ V_{XY}^{ab} \\ V_{XZ}^{ab} \\ V_{YZ}^{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^2 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & 2r_{11}r_{12} & 2r_{11}r_{13} & 2r_{12}r_{13} \\ r_{21}^2 & r_{22}^2 & r_{23}^2 & 2r_{21}r_{22} & 2r_{21}r_{23} & 2r_{22}r_{23} \\ r_{31}^2 & r_{32}^2 & r_{33}^2 & 2r_{31}r_{32} & 2r_{31}r_{33} & 2r_{32}r_{33} \\ r_{11}r_{21} & r_{12}r_{22} & r_{13}r_{23} & r_{11}r_{22} + r_{12}r_{21} & r_{11}r_{23} + r_{13}r_{21} & r_{13}r_{22} + r_{12}r_{23} \\ r_{11}r_{31} & r_{12}r_{32} & r_{13}r_{33} & r_{11}r_{32} + r_{12}r_{31} & r_{11}r_{33} + r_{13}r_{31} & r_{13}r_{32} + r_{12}r_{33} \\ r_{21}r_{31} & r_{22}r_{32} & r_{23}r_{33} & r_{21}r_{32} + r_{22}r_{31} & r_{21}r_{33} + r_{23}r_{31} & r_{23}r_{32} + r_{21}r_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{XX}^{ij} \\ V_{YY}^{ij} \\ V_{ZZ}^{ij} \\ V_{XY}^{ij} \\ V_{XZ}^{ij} \\ V_{YZ}^{ij} \end{bmatrix} \quad (2)$$

对于 GOCE,最基本的转换矩阵有 $\mathbf{R}_{\text{ERF}}^{\text{LNOF}}$ 、 $\mathbf{R}_{\text{IRF}}^{\text{GRF}}$ 、 $\mathbf{R}_{\text{IRF}}^{\text{ERF}}$ 、 $\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{IRF}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{ERF}}^{\text{LNOF}} &= \mathbf{P}_1 \mathbf{R}_2(\varphi) \mathbf{R}_3(-\lambda) = \\ &\begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda & \sin\lambda & \cos\varphi\cos\lambda \\ -\sin\varphi\sin\lambda & -\cos\lambda & \cos\varphi\sin\lambda \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

其中 φ 、 λ 分别为卫星质量中心的瞬时经纬度。

$$\mathbf{R}_{\text{IRF}}^{\text{GRF}} = \mathbf{Q}(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{W}(t) =$$

$$\begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 - q_3q_4) & 2(q_1q_3 + q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 + q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 - q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 - q_2q_4) & 2(q_2q_3 + q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 为 GRF 转换到 IRF 的四元素。

$$\mathbf{R}_{\text{IRF}}^{\text{ERF}} =$$

$$\begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1q_2 + q_3q_4) & 2(q_1q_3 - q_2q_4) \\ 2(q_1q_2 - q_3q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_2q_3 + q_1q_4) \\ 2(q_1q_3 + q_2q_4) & 2(q_2q_3 - q_1q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中 q_1 、 q_2 、 q_3 、 q_4 为 ERF 转换到 IRF 的四元素。

$$\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{IRF}} = [e_s \ e_t \ e_w]^T =$$

$$\left[\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} - \frac{\mathbf{rv}}{|\mathbf{rv}|} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \frac{\mathbf{rv}}{|\mathbf{rv}|} \right]^T \quad (6)$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ 。由此得梯度张量在各个坐标系中的广义转换模型为:

$$V_{ab} = R_{ab}^{ij} V_{ij}^{ab} R_{ij}^{ab} \quad (7)$$

2 卫星姿态误差分析

由于卫星采用磁力矩器控制其飞行姿态,受地球磁场的影响,GRF 和 LORF 两个坐标系之间存在旋转。若令 3 个旋转角 φ 为翻滚角, θ 为俯仰角, ψ 为偏航角,则:

$$\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}} = \mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{IRF}} \mathbf{R}_{\text{IRF}}^{\text{GRF}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{22} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (8)$$

其中, $A_{11} = \cos\theta\cos\psi$, $A_{21} = -\cos\theta\sin\psi$, $A_{31} = \sin\theta$, $A_{12} = \cos\theta\sin\psi + \sin\varphi\sin\theta\cos\psi$, $A_{22} = \cos\theta\cos\psi - \sin\varphi\sin\theta\sin\psi$, $A_{32} = -\sin\varphi\cos\theta$, $A_{13} = \sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\sin\theta\cos\psi$, $A_{23} = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\theta\sin\psi$, $A_{33} = \cos\varphi\cos\theta$ 。3 个旋转角为:

$$\begin{cases} \varphi = \arctan\left(-\frac{\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}}(3,2)}{\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}}(3,3)}\right) \\ \theta = \arctan\left(\frac{\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}}(3,1)}{\sqrt{\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}}(3,2)^2 + \mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}}(3,3)^2}}\right) \\ \psi = \arctan\left(-\frac{\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}}(2,1)}{\mathbf{R}_{\text{LORF}}^{\text{GRF}}(1,1)}\right) \end{cases} \quad (9)$$

分析发现,采用磁力矩器控制卫星姿态时,卫星的姿态会出现微小的偏差(偏差反映为 3 个欧拉角的变化,但最大值不会超过 $\pm 4^\circ$ ^[16]),同时反映出 GRF 和 LORF 两种坐标系极为相近。

假设卫星空间位置在经纬度方向的误差分别为 $\Delta\lambda$ 、 $\Delta\varphi$,忽略非线性项 $\Delta\lambda\Delta\varphi$,得 ERF 与 LNOF 之间的转换矩阵为:

$$\mathbf{R}_{\text{ERF}}^{\text{LNOF}} =$$

$$\begin{bmatrix} -\sin\varphi\cos\lambda + k_1 & \sin\lambda + \Delta\lambda\cos\lambda & \cos\varphi\cos\lambda + k_2 \\ -\sin\varphi\sin\lambda + k_3 & -\cos\lambda + \Delta\lambda\sin\lambda & \cos\varphi\sin\lambda + k_4 \\ \cos\varphi - \Delta\varphi\sin\varphi & 0 & \sin\varphi + \Delta\varphi\cos\varphi \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中, $k_1 = -\Delta\varphi\cos\varphi\cos\lambda + \Delta\lambda\sin\varphi\sin\lambda$, $k_2 = -\Delta\varphi\sin\varphi\cos\lambda - \Delta\lambda\cos\varphi\sin\lambda$, $k_3 = -\Delta\varphi\cos\varphi\sin\lambda - \Delta\lambda\sin\varphi\cos\lambda$, $k_4 = -\Delta\varphi\sin\varphi\sin\lambda + \Delta\lambda\cos\varphi\cos\lambda$ 。

以 GOCE 卫星为例,假设卫星的定位精度为 10 cm,造成经纬度差异的量级约为 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ rad,则 ERF 与 LNOF 之间转换矩阵的精度只能达到 $10^{-8} \sim 10^{-9}$ 量级。假设卫星的定位精度为 5 cm,造成经纬度差异的量级约为 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ rad,则 ERF 与 LNOF 之间转换矩阵的精度只能达到 $10^{-9} \sim 10^{-10}$ 量级。由此可见,ERF 与 LNOF 之间转换精度的高低直接取决于卫星轨道坐标的精度。若卫星的定位精度为 5 ~ 10 cm,可以保证引力梯度在 ERF 和 LNOF 之间的转换精度达到 $10^{-13} \sim 10^{-14}$ s⁻² 量级。

若两个直角坐标系的欧拉旋转角为 $\xi = \{\alpha, \beta, \gamma\}$,则式(1)中的转换矩阵 R 为:

$$R_{ab}^{ij} = R_x(-\alpha)R_y(-\beta)R_z(-\gamma) \quad (11)$$

由于欧拉旋转角 ξ 一般较小,近似取 $\sin\xi \approx \xi$, $\cos\xi \approx 1$,并忽略非线性项,得:

$$R_{ab}^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

将式(12)代入式(2),并忽略非线性项,化简后可得:

$$\begin{bmatrix} V_{XX}^{ab} \\ V_{YY}^{ab} \\ V_{ZZ}^{ab} \\ V_{XY}^{ab} \\ V_{XZ}^{ab} \\ V_{YZ}^{ab} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2\gamma & 2\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\gamma & 0 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2\beta & 2\alpha \\ \gamma & -\gamma & 0 & 1 & -\alpha & \beta \\ -\beta & 0 & \beta & \alpha & 1 & -\gamma \\ 0 & \alpha & -\alpha & -\beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{XX}^{ij} \\ V_{YY}^{ij} \\ V_{ZZ}^{ij} \\ V_{XY}^{ij} \\ V_{XZ}^{ij} \\ V_{YZ}^{ij} \end{bmatrix} \quad (13)$$

根据误差传播定律,由式(13)得梯度张量各分量的误差传播公式为(这里仅给出主对角线的 3 个分量,其余可类似得到):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{V_{xx}}^2 = 4(V_{XY}^{ij})^2\sigma_\gamma^2 + 4(V_{XZ}^{ij})^2\sigma_\beta^2 + \sigma_{V_{XX}^{ij}}^2 + 4\gamma^2\sigma_{V_{XY}^{ij}}^2 + 4\beta^2\sigma_{V_{XZ}^{ij}}^2 \\ \sigma_{V_{YY}}^2 = 4(V_{XY}^{ij})^2\sigma_\gamma^2 + 4(V_{YZ}^{ij})^2\sigma_\alpha^2 + \sigma_{V_{YY}^{ij}}^2 + 4\gamma^2\sigma_{V_{XY}^{ij}}^2 + 4\alpha^2\sigma_{V_{YZ}^{ij}}^2 \\ \sigma_{V_{ZZ}}^2 = 4(V_{XZ}^{ij})^2\sigma_\beta^2 + 4(V_{YZ}^{ij})^2\sigma_\alpha^2 + \sigma_{V_{ZZ}^{ij}}^2 + 4\beta^2\sigma_{V_{XZ}^{ij}}^2 + 4\alpha^2\sigma_{V_{YZ}^{ij}}^2 \end{array} \right. \quad (14)$$

可以推知,当姿态角误差分别为 10、20、50 角秒时,对主对角线三个梯度分量会造成 1×10^{-12} 、 2×10^{-12} 、 5×10^{-12} s⁻² 的误差^[6]。因此,对于精度达到 3×10^{-12} s⁻² 左右的 GOCE 梯度观测值而言,卫星的姿态控制误差是不能忽略的。

由于 SST-PSO-2 数据中的历元和 EGG-NOM-2 数据中的历元时刻不一样,为了对 EGG-NOM-2 中的梯度数据进行坐标系转换,将 SST-PSO-2 中的数据内插到与 EGG-NOM-2 中的历元相对应的时刻,利用内插后得到的 ERF 与 IRF 转换四元素可以得到将梯度数据从 ERF 转换到 IRF 的转换矩阵,同时将其与 IERS 网站上计算得到的 ERF 转换到 IRF 的转换矩阵进行比较。由图 1 可知,利用 SST-PSO-2 数据中的四元素计算得到的 ERF 到 IRF 转换矩阵的精度达到了 10^{-10} 左右的量级,可以保证引力梯度在 ERF 和 IRF 之间的转换精度达到 $10^{-14} \sim 10^{-15}$ s⁻² 量级,完全满足 GOCE 梯度测量的要求。

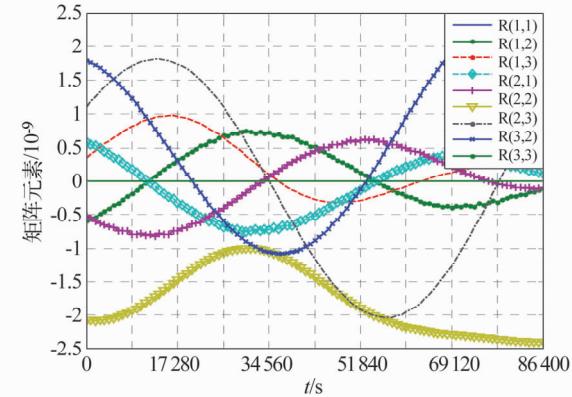


图 1 ERF 到 IRF 转换矩阵与 IERS 计算值之差

Fig. 1 Conversion matrix from ERF to IRF and differences between IRF values and IERS values

3 梯度张量的转换策略

利用 2009-11-02 一天的 GOCE 几何学轨道数据,采用 EIGEN-5C 模型(前 300 阶)和 GO_CONS_GCF_2_DIR_R3 模型(240 阶)分别模拟在 ERF 和 IRF 中的梯度张量,前者模拟值作为真实值,后者模拟值作为参考值。按照图 2 的流程分别采用直接逐点旋转法和“移去-恢复”逐点旋转法将 ERF 中的梯度数据转换至 IRF 中,并与模拟的 IRF 中的梯度值进行比较(图 3)。可以看出,由于参考重力场模型的差异,模拟的参考值和真实值之间的差值在 10^{-12} 量级(图 3(a));无论是采用直接法(图 3(b))还是“移去-恢复”法(图 3(c)),转换后的精度均比原始模拟值的精度低,这是由于转换矩阵存在误差。但采用“移去-恢复”法进行旋转的精度要比直接旋转

的精度高一个量级以上,非常接近原始模拟值,可以认为其主要受转换矩阵精度的影响(即星载恒星敏感器的精度限制)。

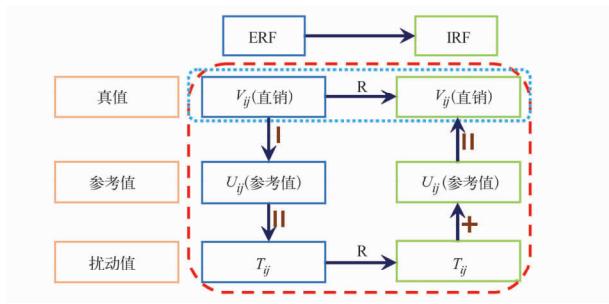


图 2 “移去-恢复”法旋转流程示意图

Fig. 2 Schematic diagram of rotation gradients with the “remove-restore” method

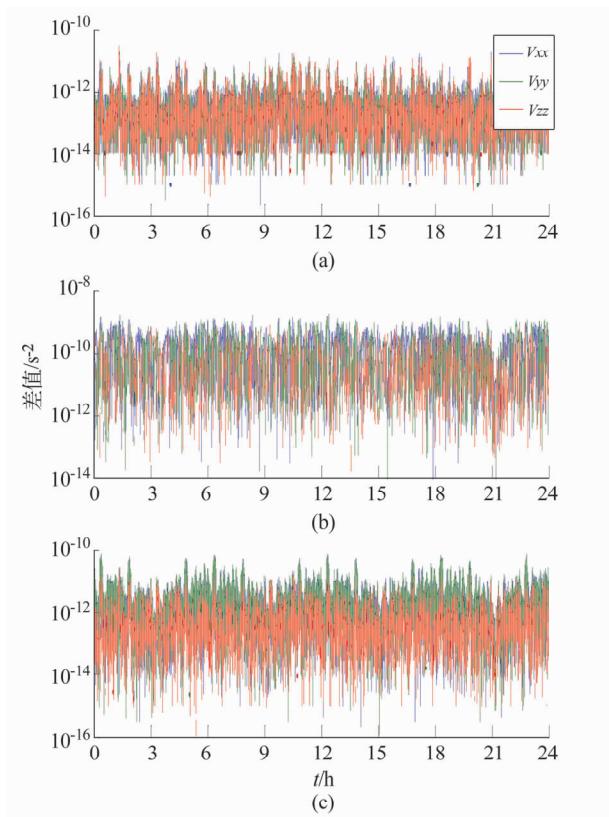


图 3 逐点旋转法的精度

Fig. 3 Accuracy of pointwise rotation

参考引力梯度张量 U_{ij} 可以取球近似值,即 $U_{xx} = U_{yy} = -\frac{GM}{\gamma^3}$, $U_{zz} = \frac{2GM}{\gamma^3}U_{xy} = U_{xz} = U_{yz} = 0$ 。本文利用现有 GOCE 重力场模型的梯度模拟值作为参考引力梯度张量。

从分析可以看出,GOCE 各项姿态控制设计指标基本满足要求,就可以保证在满足精度要求下完成梯度张量的坐标转换。但 GOCE 的实测数据包含大量的低频噪声,数据质量非常差,其在测量带宽(MBW) $0.005 \sim 0.1$ Hz 内的设计精度约为 4×10^{-12}

$s^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}$,而实际的测量精度更低,达到了 $(10 \sim 20) \times 10^{-12}s^{-2}/\sqrt{\text{Hz}}^{[15]}$ 。因此,在将 GRF 中的梯度数据转换到其他坐标系之前,应先对 GRF 中的梯度数据进行滤波处理,以降低有色噪声的影响,而滤波时同样可以采用“移去-恢复”方法^[17]。

本文采用的数据为 EGG-NOM-2、EGG-TRF-2 和 SST-PSO-2,选择的参考重力场模型为 GO_CONS_GCF_2_DIR_R3。具体数据处理流程为:首先获取 EGG-NOM-2 中每个历元对应时刻的卫星位置,以 EGG-NOM-2 中的历元时间为参考(由于 EGG-TRF-2 数据是 EGG-NOM-2 数据经过进一步处理得到的,因此两者历元时间一样),将 SST-PSO-2 中的轨道数据和姿态数据内插至与 EGG-NOM-2 对应的各个历元。然后沿轨模拟 ERF(或 IRF)中的梯度值^[16~19],将模拟的梯度张量转换至 GRF 中作为参考引力梯度张量,替换掉两个低精度的观测分量 V_{xy}, V_{yz} ,同时得到其他分量的扰动引力梯度值。对其他观测分量的扰动引力梯度值进行带通滤波,再加上参考引力梯度张量,得到滤波后 GRF 中的引力梯度张量值。

4 结语

本文给出了梯度张量在不同坐标系中转换的逐点旋转模型,并分析了各种误差对梯度张量转换的影响,引入“移去-恢复”方法对梯度张量进行转换。“移去-恢复”方法是利用重力场频谱的可叠加特性,由于 GOCE 实测梯度数据含有大量的低频有色噪声,利用实测数据减去高精度先验重力场模型的模拟值,可以有效削弱低频误差的影响,因此“移去-恢复”方法的转换误差要比直接转换的误差小。实际处理结果表明,GOCE 的姿态转换矩阵的误差对梯度张量转换结果的影响不会超过测量带宽内的精度,对原始梯度张量观测值进行滤波处理是必须的,采用“移去-恢复”方法能显著提高梯度数据的转换精度。

致谢 感谢欧空局(ESA)提供 GOCE 观测数据。

参 考 文 献

- Bruinsma S L, et al. GOCE gravity field recovery by means of the direct numerical method [C]. ESA Living Planet Symposium, Bergen, Norway, 2010.
- Pail R, et al. Global gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method [C]. ESA Living Planet Symposium, Bergen, Norway, 2010.
- Migliaccio F M, et al. The space-wise approach and first space-wise gravity field model [C]. ESA Living Planet Symposium, Bergen, Norway, 2010.

(下转第 159 页)