

文章编号:1671-5942(2014)05-0168-06

基于鲁棒马氏距离的 LiDAR 点云粗差探测与分析<sup>\* 1</sup>

冯 林<sup>1)</sup> 李斌兵<sup>2,3)</sup> 黄 磊<sup>3)</sup>

- (1) 武警工程大学研究生管理大队,西安 710086
- (2) 水利部黄土高原水土流失过程与控制重点实验室,郑州 450003
- (3) 武警工程大学信息工程系,西安 710086

**摘 要** 基于鲁棒马氏距离,提出了针对 LiDAR 点云的粗差探测与剔除算法。首先,将 LiDAR 点云数据划分为子块,对各个子块点云分布的中心、尺度等统计参数使用确定型最小广义方差估计算法进行鲁棒估计。而后计算各点的鲁棒马氏距离,根据鲁棒马氏距离的平方服从卡方分布的假设,在指定的置信度下得出相应的粗差判别限,对点云的粗差进行识别与剔除。将粗差探测与剔除算法应用到甘肃天水桥子沟一条典型切沟的测量数据中,测试了点云分块中不同子块大小与 detMCD 中不同子样本相对大小这两个参数与粗差剔除率的关系。结果表明,随着子块平均点数的增大,粗差的剔除率逐渐增大;而随着子样本相对大小的增加,粗差的剔除率逐渐减少。通过粗差剔除前后的点云 TIN 图像和剖面图像比较,本文提出的粗差探测与剔除算法可以有效去除 LiDAR 点云数据中的粗差,提高粗差剔除的准确性与可靠性。

**关键词** LiDAR;点云;鲁棒马氏距离;确定型最小广义方差估计算法;粗差探测与剔除  
**中图分类号**:P237.3 **文献标识码**:A

DETECTION AND ANALYSIS OF GROSS ERROR IN LIDAR POINT CLOUD BASED ON ROBUST MAHALANOBIS DISTANCE

Feng Lin<sup>1)</sup>, Li Binbing<sup>2,3)</sup> and Huang Lei<sup>3)</sup>

- (1) Postgraduate Management Group, Engineering University of CAPF, Xi'an 710086
- (2) Key Lab of Soil Erosion Process and Control in Loess Plateau, Ministry of Water Resources, Zhengzhou 450003
- (3) Department of Information Engineering, Engineering University of CAPF, Xi'an 710086

**Abstract** Based on the Robust Mahalanobis Distance, an algorithm for detecting and removing gross error in LiDAR point cloud is proposed. First, LiDAR point cloud is divided into several blocks. Then, detMCD (deterministic minimum covariance determinant) algorithm is performed to get robust estimation of the position and scale parameters of each block. With these parameters, Robust Mahalanobis Distance of each point within the block is calculated. As the square of Robust Mahalanobis Distance could be considered to obey Chi-square distribution, the gross error discrimination threshold could be obtained with certain confidence. Finally, gross errors might be detected and removed with the threshold and robust mahalanobis distance in each block. The proposed algorithm was tested in LiDAR data acquired from a typical gully in Qiaozhi Valley, Tianshui City of Gansu Province. The algorithm was performed with various combinations of parameters, including the average point number per block in point cloud dividing step and the relative size of subset reserved in detMCD step. The results show that more points were removed as gross errors with increase of the average point number per block, while a larger relative size of subset led to less

\* 收稿日期:2014-03-03  
基金项目:国家自然科学基金项目(41171224);国家水利部黄土高原水土流失过程与控制重点实验室开放基金项目(201402)。  
作者简介:冯林,男,1991年生,硕士生,主要研究方向为 LiDAR 测量与测量数据处理。E-mail:1991FengLin@gmail.com。

points detected as gross errors. The comparison of the TIN and profiles generated by LiDAR point cloud before and after the gross error detected and removed shows that the proposed algorithm can remove the gross error in LiDAR point cloud efficiently and achieve higher accuracy and robustness.

**Key words:** LiDAR; point cloud; robust Mahalanobis distance; detMCD; detection and remove for gross error

在利用激光扫描技术(LiDAR)对地形场景进行扫描时,获取的点云中存在远离地形表面的成簇点云或离散点,形成点云数据的粗差,并带入地形表面重建、地形特征提取、地形变化监测等过程中。因此,在数据处理过程中,有必要将这些粗差剔除。许多学者就点云数据粗差的探测与剔除进行了相关研究<sup>[1-3]</sup>,目前的方法主要有基于分布、基于深度、基于聚类、基于距离和基于密度等5种<sup>[4]</sup>。

随着鲁棒统计学理论的发展,尤其是多元鲁棒统计方法的完善,基于鲁棒统计方法的粗差剔除在应用中日渐成熟。传统的统计方法通常基于对样本分布的某种假设,如正态分布。但实际数据可能会存在噪声与偏差,从而影响到相关分布假设下的统计参数计算。鲁棒统计就是要在偏差值不可避免的情况下,通过选择适当的估计方法,使相关统计参数的估计尽可能免受偏差值的影响,从而得到相关参数的正确估计<sup>[5]</sup>。对于点云数据这种大规模的多元空间数据,可以将马氏距离作为度量,基于高斯分布的假设,对粗差进行探测和剔除<sup>[6]</sup>。由于传统的参数估计方法鲁棒性很差,无法在有粗差的情况下得到数据样本位置参数和尺度参数的可靠估计,最终得到的马氏距离也就不具有鲁棒性,无法对粗差进行可靠的探测与剔除。对于多元变量的位置 $\hat{\mu}$ 和散布 $\hat{\Sigma}$ 的鲁棒估计,主要有3种方法:M估计、S估计和MCD估计<sup>[7]</sup>。这些估计方法虽然实现方式不同,但都能在估计出样本的位置和分布的同时,识别离群点。本文对基于鲁棒马氏距离的LiDAR点云粗差探测与剔除进行研究,基于最小广义方差估计方法,得到LiDAR点云的鲁棒马氏距离。结合点云的自适应分块,提出并实现了针对LiDAR点云的粗差探测与剔除算法,最后通过实验对算法进行验证与分析。

## 1 点云的粗差探测与剔除算法原理

### 1.1 传统马氏距离

设 $n$ 个 $p$ 元观测值构成观测值矩阵 $X = (x_1, \dots, x_n)_{n \times p}^T$ ,其中 $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})^T$ 。又设观测值 $X$ 的中心向量为 $\hat{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)$ ,协方差矩阵为 $\hat{\Sigma}_{p \times p}$ ,则观测值 $x_i$ 的马氏距离为:

$$D(x_i, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}) = \sqrt{(x_i - \hat{\mu})^T \hat{\Sigma}^{-1} (x_i - \hat{\mu})} \quad (1)$$

假设观测值符合正态分布,即 $x_i \sim N(\mu, \Sigma)$ ,则 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\Sigma}$ 分别为中心向量和协方差矩阵的无偏估计,马氏距离的平方服从自由度为 $p$ 的卡方分布,即 $D^2(x_i, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}) \sim \chi^2(p)$ 。根据该分布特点,可以按照一定的置信度,以观测值的马氏距离是否超出置信区间作为判断粗差的条件,即区间边界值应满足:

$$P\{D(x_i, \hat{\mu}, \hat{\Sigma}) \geq \sqrt{\chi_{p,1-a}^2}\} = a, i = 1, \dots, n \quad (2)$$

但是,观测值中含有粗差时,粗差将歪曲对 $\hat{\mu}$ 和 $\hat{\Sigma}$ 的估计,最终影响到马氏距离的计算,削弱其粗差探测的效果。因此,必须在抗差的条件下得到 $\hat{\mu}_r$ 和 $\hat{\Sigma}_r$ ,才能得到鲁棒的马氏距离估计。

### 1.2 基于最小广义方差估计的鲁棒马氏距离

Rousseeuw<sup>[8]</sup>提出的最小广义方差估计方法(MCD, minimum covariance determinant)是多元数据均值向量和协方差矩阵的一种鲁棒估计方法。该算法的核心在于:对于 $n$ 个 $p$ 元观测值 $x_1, \dots, x_n$ ,挑选出 $h$ 个( $n/2 < h \leq n$ )作为子样本对总体的均值向量和协方差矩阵进行估计。这 $h$ 个样本的协方差矩阵的行列式是所有可能的 $C_n^h$ 种子样本组合中最小的,从而确保子样本中没有离群点。对于容量较小的样本来说,可以通过枚举法找出这 $h$ 个样本,但是如果容量较大,枚举法在时间效率上不再适用,这也是一直以来制约MCD方法在实践中应用的障碍。直到Rousseeuw和Driessen<sup>[9]</sup>提出改进的Fast-MCD算法,才使得MCD方法真正应用于各种鲁棒估计中。

Fast-MCD利用迭代的思想基于马氏距离构造一个鲁棒的协方差矩阵和鲁棒的均值向量,但是算法中以随机抽取的样本数据作为算法的初值,并且当样本数 $n$ 较大时,人为把样本划分为若干个部分,分别计算后整合。它属于一种随机化算法,初值选择是否恰当,会直接影响算法的收敛速度和计算效率;而分块是否恰当,将影响是否会误识离群点。

针对MCD和Fast-MCD方法存在的问题,Hubert等提出一种计算MCD的确定性算法,即确定性最小广义方差估计(detMCD, deterministic MCD)。它在迭代过程中用确定性算法代替随机算法,提高了收敛速度。在初始值的选择上,通过特别选定的初始值,克服了FastMCD的不稳定性,具有排列不变性(即算法结果与观测值的排列次序无关)。Hu-

bert 等的实验表明, detMCD 与 FastMCD 具有相同的鲁棒性<sup>[10]</sup>。根据 MCD 算法得到的样本位置和分布的鲁棒估计  $\hat{\mu}_r$  和  $\hat{\Sigma}_r$ , 可以得到观测值的鲁棒马氏距离:

$$RD(x_i) = D(x_i, \hat{\mu}_r, \hat{\Sigma}_r) \quad (3)$$

## 2 点云的粗差探测与剔除算法

算法流程见图 1。

1) 点云分块: 输入为原始 LiDAR 点云  $\{C\}$ , 输出为各点云子块  $\{CB_i\}$ 。采用点云自适应分块算法, 参数为各子块内平均点数  $n$ 。

2) 点云子块的中心与分布参数计算: 输入为点云子块  $\{CB_i\}$ , 输出为该点云子块样本的中心和分布的鲁棒估计  $\{\mu_i, \Sigma_i\}$ 。采用 detMCD 算法, 主要参数为子样本大小  $h$  ( $n/2 < h \leq n$ )。

3) 鲁棒马氏距离计算: 输入为点云子块中各点  $P_k$ , 子块中心和分布估计量  $\{\mu_i, \Sigma_i\}$ 。输出为各点的鲁棒马氏距离  $RD_k$ 。

4) 粗差判别: 输入为点云子块内各点的鲁棒马氏距离  $\{RD_k\}$  以及粗差剔除的置信度  $\alpha$ , 输出为剔除掉的点集  $\{CB\_Removed\}$  与保留下的点集  $\{CB\_Reserved\}$ 。方法是根据卡方分布与设定的置信度, 计算出粗差判别限  $L$ , 对粗差进行剔除。

5) 合并子块: 输入为各子块剔除掉的点集  $\{CB\_Removed\}$  和保留下的点集  $\{CB\_Reserved\}$ , 输出为整体点云中剔除掉的点集  $\{C\_Removed\}$  和保留下的点集  $\{C\_Reserved\}$ 。

### 2.1 点云分块

在对点云进行粗差剔除前, 需要将点云划分为若干子块, 既可提高运算效率, 也可分割不同的地形表面, 使得各个子块的点云高程分布更加符合高斯分布。点云的分割方法有基于区域增长、基于模型拟合及基于特征聚类等 3 大类方法<sup>[11]</sup>。本文参照文献[12], 运用一种分块近似的思想将点云数据快速地划分为若干个点数近似的子块。其中, 根据点云数据的采样密度和设定的分块面积, 计算出子块内平均点数作为度量分块大小的参数。

### 2.2 点云子块统计参数估计

设点云数据存储为矩阵  $X$ , 行向量为各点空间坐标  $x_i^T$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 列向量为  $X_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ), 则点云子块统计参数估计流程如下。

首先, 对于每个列向量  $X_j$ , 根据其中位数和  $Q_n$  对点云矩阵进行规范化, 其中  $Q_n$  为一种样本分布尺度的鲁棒估计量<sup>[13]</sup>。通过规范化, 确保算法对点云位置中心和分布尺度变化的不变性。设规范化后

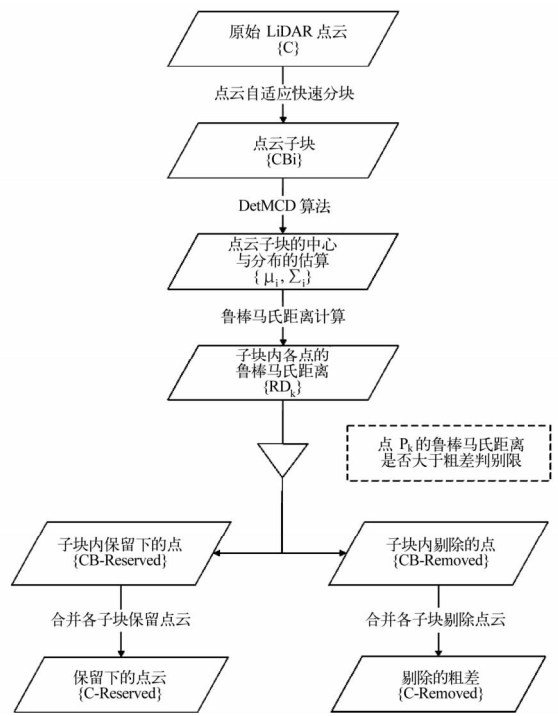


图 1 算法流程

Fig. 1 Scheme of the algorithm

的矩阵为  $Z$ , 行向量为  $z_i^T$  ( $i = 1, \dots, n$ ), 列向量为  $Z_j$  ( $j = 1, \dots, 3$ )。

然后, 计算出 6 个  $\hat{\mu}_l(Z)$  和  $\hat{\Sigma}_l(Z)$  的初始估计量 ( $l = 1, \dots, 6$ ), 对  $Z$  的中心和分布进行估计。由上述每组估计量的计算也可以得到矩阵  $Z$  的方差或协方差矩阵估计量  $S_l$ , 具体见文献[10]中的初始估计量计算方法。因为这些估计量  $S_l$  的特征值通常不够精确, 所以需要对其进行下列处理。

1) 计算  $S_l$  的特征值和特征向量, 其特征向量构成矩阵  $E$ , 令  $B = ZE$ 。

① 通过  $\hat{\Sigma}_l(Z) = ELE^T$  估计  $Z$  的协方差。其中  $L = \text{diag}(Q_n^2(B_1), \dots, Q_n^2(B_p))$ ,  $Q_n^2(B_1)$  是矩阵  $B$  的列向量的  $Q_n$  估计的平方。

② 将矩阵  $Z$  投影到椭球面上, 分别计算椭球系下各坐标轴上的投影中值, 再将各中值投影回到原始坐标系, 得到样本中心位置的估计。公式为:  $\hat{\mu}_l(Z) = \hat{\Sigma}_l^{1/2}(\text{med}(\hat{Z}\hat{\Sigma}_l^{-1/2}))$ 。

2) 采用上述得到的所有估计量 ( $\hat{\mu}_l(Z)$ ,  $\hat{\Sigma}_l(Z)$ ) ( $l = 1, \dots, 6$ ), 计算各观测值的鲁棒马氏距离:

$$d_{i,l} = RD(z_i, \hat{\mu}_l(Z), \hat{\Sigma}_l(Z)) \quad i = 1, \dots, n; l = 1, \dots, 6 \quad (4)$$

对于每组估计量  $l$ , 选择鲁棒马氏距离  $d_{i,l}$  最小的  $n/2$  个观测值, 根据这  $n/2$  个观测值重新计算估计量 ( $\hat{\mu}_l^*(Z)$ ,  $\hat{\Sigma}_l^*(Z)$ ) 和各观测值的鲁棒马氏距离  $d_{i,l}^*$ 。然后在由所有 6 组估计量得到的观测值的鲁

棒马氏距离  $d_{i,l}^*$  中,选择  $d_{i,l}^*$  值最小的  $h$  个观测值,构成子样本  $P_1$ 。由这  $h$  个子样本作为初始样本,进行优化迭代。

步骤 1:初始  $k=1$ ,根据当前的子样本  $P_k$ ,计算统计参数  $(\hat{\mu}_k(Z), \hat{\Sigma}_k(Z))$ 。

步骤 2:根据  $(\hat{\mu}_k(Z), \hat{\Sigma}_k(Z))$ ,计算每个观测值的鲁棒马氏距离并找到鲁棒马氏距离最小的  $h$  个观测值。

步骤 3:将步骤 2 得到的  $h$  个观测值作为子集  $P_{k+1}$ ,计算统计参数  $(\hat{\mu}_{k+1}(Z), \hat{\Sigma}_{k+1}(Z))$ 。

步骤 4:如果  $\det(\hat{\Sigma}_{k+1}(Z)) = 0$  或  $\det(\hat{\Sigma}_{k+1}(Z)) = \det(\hat{\Sigma}_k(Z))$ ,迭代停止。否则,  $k = k + 1$ ,转步骤 2。

3)根据迭代得到的行列式值最小时的子样本,计算得到样本中心和分布的鲁棒估计  $(\hat{\mu}_r(Z), \hat{\Sigma}_r(Z))$ 。

### 2.3 鲁棒马氏距离计算与粗差剔除

采用上述点云子块中心和分布的鲁棒估计量  $(\hat{\mu}_r(Z), \hat{\Sigma}_r(Z))$ ,计算各观测值的鲁棒马氏距离  $RD_k = D(x_i, \hat{\mu}_r, \hat{\Sigma}_r)$ 。然后根据选定的置信度  $\alpha$ ,计算出粗差判别限  $L$ 。根据统计显著性水平的原理与概念,通常可取显著性水平 2.5%,相应的置信度为 97.5%。

$$L = \sqrt{\chi_{3,\alpha}^2} \tag{5}$$

最后,根据粗差判别式对粗差进行剔除。粗差判别式为:

$$S_k = \begin{cases} \text{粗差点, } RD_k > L \\ \text{正常点, } RD_k \leq L \end{cases} \tag{6}$$

## 3 实验与分析

实验数据选择甘肃天水桥子沟一条典型切沟的实地测量数据(图 2)。该切沟位于东经 105°43'2"、北纬 34°36'59",切沟长度为 3.4 m,沟头深 0.9 m,宽 6.6 m,坡度 21°,沟下方有一陡坎长 4 m、宽 1 m、深 0.8 m,断面呈典型的 V 字型,切沟表面 90% 被低矮豆科类植物和荒草覆盖。利用 Leica HDS6100 型三维激光扫描仪对切沟进行初始扫描并存储点云数据,扫描精度为 1 mm,包含激光脚点个数为 2 484 405,回光强度取值范围为 -2 048 ~ 2 047,覆盖面积为 14.097 5 m<sup>2</sup>,点云平均密度为 3 345.1 个/m<sup>2</sup>。

采用本文算法对实验地域的 LiDAR 点云数据在 Matlab R2008 内进行粗差探测与分析。首先,为了分析不同参数对粗差剔除的影响,测试点云分块中不同的子块大小与 detMCD 中不同子样本相对大

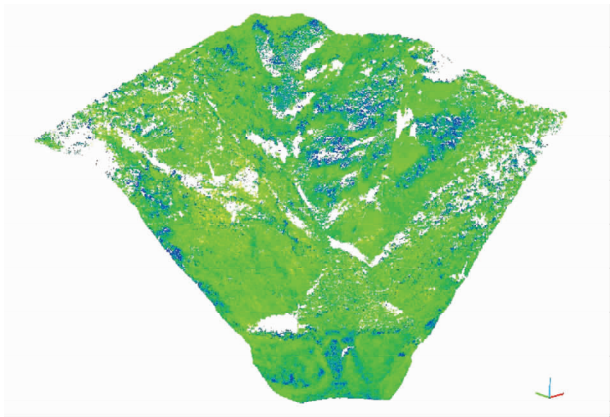


图 2 实验地域原始点云  
Fig. 2 Original cloud point of the study area

小两个参数与粗差剔除率的关系,其中子样本相对大小  $h' = h/n (0 < h' < 1)$ ,结果见表 1。可以看出,随着子块平均点数的增大、子块面积的增加,粗差的剔除率也逐渐增大;而随着子样本相对大小的增加,粗差的剔除率逐渐减小。对此,可以认为子块面积越小,则子块内地形的一致性就更好,点云更符合同一分布模式。随着子块面积的增大,子块内地形复杂性增大,会有正常点被错误地识别为粗差点。而子样本相对大小相当于对点云粗差比例的估计,需要结合数据和经验合理选取,通常为 0.85 ~ 0.95 比较合适。

为了具体分析算法的粗差剔除效果,在点云平均点数为 1000, detMCD 子样本相对大小为 0.95,表 1 不同子块平均点数、子样本相对大小参数组合下粗差剔除率

Tab.1 Rates of gross error removed with various average point number per block and relative size of subset			
实验序号	子块平均 点数 $n$	子样本相 对大小 $h'$	粗差剔 除率/%
1	1 000	0.650 0	15.404 2
2	1 000	0.750 0	10.666 8
3	1 000	0.850 0	6.646 6
4	1 000	0.950 0	3.787 9
5	2 000	0.650 0	15.631 3
6	2 000	0.750 0	10.703 2
7	2 000	0.850 0	6.568 2
8	2 000	0.950 0	3.789 5
9	3 000	0.650 0	16.283 2
10	3 000	0.750 0	11.126 8
11	3 000	0.850 0	6.836 4
12	3 000	0.950 0	3.989 2
13	4 000	0.650 0	16.043 9
14	4 000	0.750 0	11.455 7
15	4 000	0.850 0	6.987 6
16	4 000	0.950 0	4.021 7

置信度为 97.5% 的参数条件下进行实验并分析。

为了说明 detMCD 算法的运算结果,选择一个点云子块(图 3)。根据 detMCD 算法得到子块内各点的鲁棒马氏距离和粗差判别限,将其与经典马氏距离及其粗差判别限进行比较(图 4)。图中,红色水平线为鲁棒马氏距离的粗差判别限,红色竖直线为传统马氏距离的粗差判别限,其值均为  $\sqrt{\chi^2_{3,0.975}}=3.057$ 。红色水平线上方为鲁棒马氏距离下判别

出的粗差点,红色竖直线右侧为传统马氏距离下判别出的粗差点。由图 4 可见,在同样的置信度下,鲁棒马氏距离能够判别出更多的粗差点。

图 5 为粗差剔除前后, LiDAR 点云生成的 TIN 的变化图,其中红色为剔除的粗差。图 6(a)和图 6(b)为粗差剔除前后的点云剖面对比,可以看出,在剔除粗差的同时保持了原地形特征,没有过度剔除。

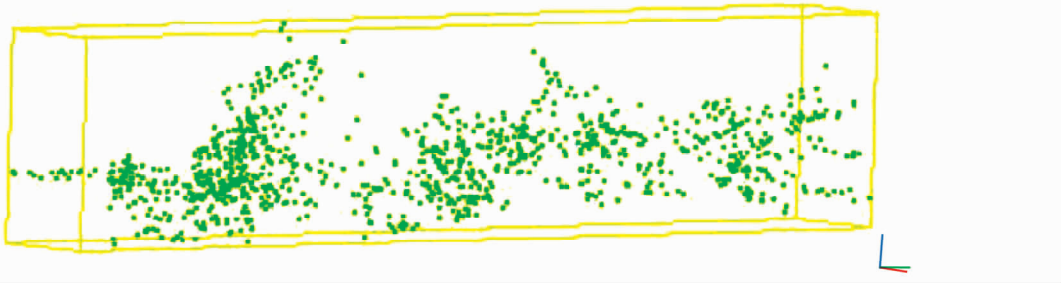


图 3 子块点云数据  
Fig. 3 Cloud point of asub blocks

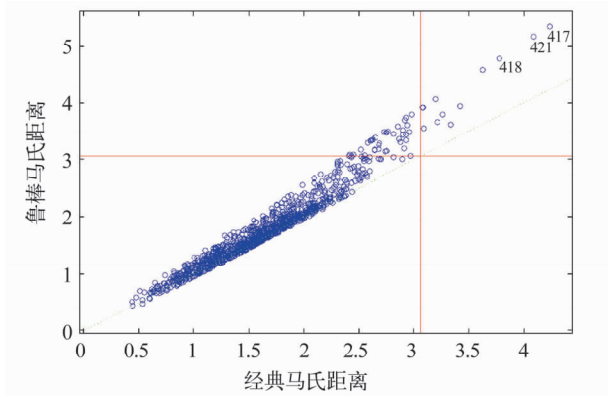


图 4 子块内点云的鲁棒马氏距离及粗差判别限与传统马氏距离及粗差判别限的比较  
Fig. 4 Comparison between robust Mahalanobis distance and traditional Mahalanobis distance, the red lines are their corresponding gross error limits

4 结 论

- 1) 本文提出基于鲁棒马氏距离的 LiDAR 点云粗差剔除算法,通过在 Matlab 下的编程实验,验证了算法对粗差的剔除效果;并与经典马氏距离及其粗差判别限进行比较,在同样的置信度下,鲁棒马氏距离能够判别出更多的粗差点,克服了粗差对传统马氏距离的影响。
- 2) 通过粗差剔除前后的点云剖面对比可以看出,本文算法在剔除粗差的同时,保持了原地形特征,没有出现过度剔除。
- 3) 对不同的子块平均点数和子样本大小组合进行测试,分析了子块平均点数和子样本相对大小

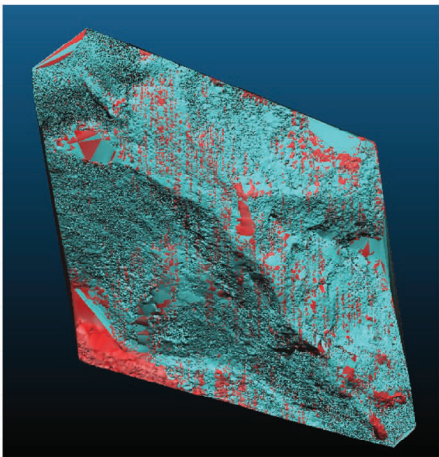


图 5 粗差剔除前后 TIN 的变化  
Fig. 5 Differences between the original TIN and gross error removed TIN

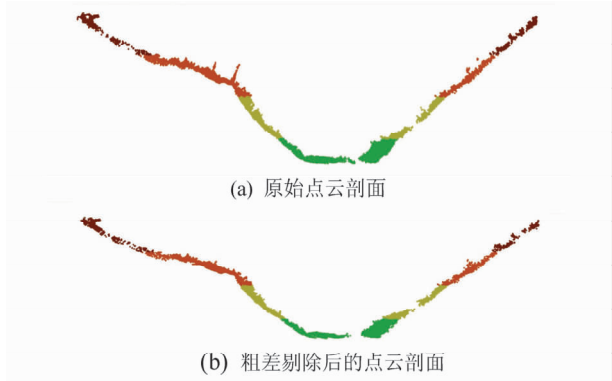


图 6 粗差剔除前后剖面对比  
Fig. 6 Comparison of original LiDAR profile with gross error removed LiDAR profile

与粗差剔除率的关系。结果表明,随着子块平均点数的增加,粗差的剔除率也逐渐提高;而随着子样本相对大小的增加,粗差的剔除率逐渐降低。

4)点云的分块是影响粗差剔除的一个重要因素,下一步主要的改进方向是实现高效的基于地形特征的点云分割,提高各点云子块内地形的一致性,进一步提高粗差探测的准确性。

参 考 文 献

1 李芸,杨志强,杨博. 山区 LiDAR 点云数据的阶层次粗差探测与分析[J]. 大地测量与地球动力学,2012,32(2):60 – 63. ( Li Yun, Yang Zhiqiang, Yang Bo. Gross error detection and analysis by hierarchical classification of mountainous LiDAR data [ J ]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2012,32(2):60 – 63 )

2 聂建辉,胡英,马孜. 散乱点云离群点的分类识别算法 [ J ]. 计算机辅助设计与图形学学报,2011,23(9):1 526 – 1 532. ( Nie Jianhui, Hu Ying, Ma Zi. Outlier detection of scattered point cloud by classification [ J ]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2011, 23 ( 9 ) : 1 526 – 1 532 )

3 Nurunnabi A, West G, Belton D. Robust outlier detection and saliency features estimation in point cloud data [ C ]. 2013 International Conference on. IEEE, 2013.

4 徐雪松,宋东明,张谓,等. 基于局部线性加权的离群点检测方法 [ J ]. 计算机科学,2008,35(5):154 – 157. ( Xu Xuesong, Song Dongming, Zhang Xu, et al. Research of detection of outliers based on locally weighted value [ J ]. Journal of Computer Science, 2008, 35 ( 5 ) : 154 – 157 )

5 Huber P J. Robust statistics [ M ]. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

6 Giménez E, Crespi M, Garrido M S, et al. Multivariate outlier

detection based on robust computation of Mahalanobis distances: Application to positioning assisted by RTK GNSS Networks [ J ]. International Journal of Applied Earth Observation and Geoinformation, 2012, 16 : 94 – 100.

7 Maronna R A, Martin R D, Yohai V J. Robust statistics [ M ]. Wiley J, 2006.

8 Rousseeuw P J. Multivariate estimation with high breakdown point [ J ]. Mathematical Statistics and Applications, 1985, B: 283 – 297.

9 Rousseeuw P J, Driessen K V. A fast algorithm for the minimum covariance determinant estimator [ J ]. Technometrics, 1999, 41 ( 3 ) : 212 – 223.

10 Hubert M, Rousseeuw P J, Verdonck T. A deterministic algorithm for robust location and scatter [ J ]. Journal of Computational and Graphical Statistics, 2012, 21 ( 3 ) : 618 – 637.

11 闫利,谢洪,胡晓斌,等. 一种新的点云平面混合分割方法 [ J ]. 武汉大学学报:信息科学版,2013,38(5):517 – 521. ( Yan Li, Xie Hong, Hu Xiaobing, et al. A new hybrid plane segmentation approach of point cloud [ J ]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2013, 38 ( 5 ) : 517 – 521 )

12 马鼎,李斌兵. 黄土沟壑区切沟植被的激光点云滤波及地形构建 [ J ]. 农业工程学报,2013,29(15):162 – 171. ( Ma Ding, Li Binbing. Vegetation filtering in gully region of loess plateau based on laser scanning point cloud's intensity attenuation model and its terrain construct [ J ]. Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering, 2013, 29 ( 15 ) : 162 – 171 )

13 Rousseeuw P J, Croux C. Alternatives to the median absolute deviation [ J ]. Journal of the American Statistical Association, 1993, 88 ( 424 ) : 1 273 – 1 283.