

# 基于抛物线拟合的椭球面区域面积计算方法

刘 洋<sup>1</sup> 高井祥<sup>1</sup> 王 坚<sup>1</sup> 李增科<sup>1</sup>

1 中国矿业大学国土环境与灾害监测国家测绘地理信息局重点实验室,徐州市大学路 1 号, 221116

**摘 要:**在对高斯投影面积变形的性质及量级进行全面分析的基础上,顾及地球曲率,提出抛物线拟合面积修正法,用以计算椭球面区域的面积。该方法根据区域的横坐标平均值,可直接将高斯平面面积转化为椭球面面积,不仅计算简便、精度高,而且稳定性好。

**关键词:**高斯投影面积;椭球面面积;面积变形曲线;抛物线拟合;面积变形修正法

**中图分类号:**P218 **文献标识码:**A

用水平面代替大地水准面进行测绘时,地球曲率对水平距离、水平角和高差的影响已有大量研究,而对面积产生的影响则研究较少<sup>[1-2]</sup>。已有的等面积投影法<sup>[3]</sup>或其他改正公式<sup>[4-5]</sup>存在计算复杂或精度低、精度不稳定等缺陷。本文根据所编写的面积计算程序<sup>[6-8]</sup>,寻求地表区域高斯投影面积与其在地球椭球面上的实际面积之间的确切数学关系,探讨地球曲率对面积计算产生的影响。

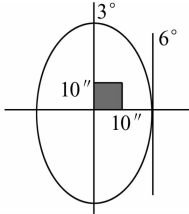


图 1 梯形在高斯投影带中的位置  
Fig. 1 The position of the trapezoid in Gauss projection zone

## 1 高斯投影面积变形的量级分析

对于任意形状的区域,由于难以直接应用公式精确计算其在椭球面上的面积,因此本文先根据简单的图形得出高斯投影变形的量级关系。对于复杂的图形,便可将其分解为若干简单图形,然后进行累加计算。设有位于地球椭球表面的梯形,经差与纬差均为 10",底边为赤道。为了完整地分析高斯投影的面积变形规律,需将梯形在整个投影带内遍历。由于投影带相对于中央子午线对称,因此在 6°投影带的第一带内,将梯形从 3°经线到 6°经线按 10"的步长逐一平移,得到 1 080 个位于不同经度范围内的梯形,如图 1 所示。

计算得到所设梯形在地球椭球面上的真实面积为 94 980. 716 m<sup>2</sup>,并且在所设定的相同纬度范围内,梯形面积与其所在的经度位置无关。将梯形 4 个顶点的大地坐标经高斯正算,得到其高斯平面直角坐标。利用解析法平面面积计算公式计算梯形的高斯投影面积,求得高斯投影所引起的面积变形相对误差,如表 1 所示(以 10'间距列出)。

表 1 高斯投影面积变形相对误差

Tab. 1 The relative errors of Gauss projection's area deformation

经差	横坐标值/m	投影面积/m <sup>2</sup>	相对误差
10'5"	18 708. 203	94 981. 539	1/115 461
20'5"	37 261. 952	94 983. 980	1/29 104
30'5"	55 816. 018	94 988. 039	1/12 971
40'5"	74 370. 560	94 993. 717	1/7 306
50'5"	92 925. 735	95 001. 014	1/4 679
60'5"	111 481. 703	95 009. 931	1/3 251
70'5"	130 038. 620	95 020. 468	1/2 389
80'5"	148 596. 645	95 032. 626	1/1 830
90'5"	167 155. 937	95 046. 405	1/1 446
100'5"	185 716. 652	95 061. 808	1/1 171
110'5"	204 278. 951	95 078. 834	1/968
120'5"	222 842. 992	95 097. 485	1/813
130'5"	241 408. 932	95 117. 762	1/693
140'5"	259 976. 931	95 139. 667	1/598
150'5"	278 547. 147	95 163. 201	1/520
160'5"	297 119. 738	95 188. 365	1/457
170'5"	315 694. 865	95 215. 162	1/405
179'55"	333 963. 032	95 243. 106	1/362

注:梯形在椭球面上的真实面积为 94 980. 716 m<sup>2</sup>。

由表 1 可知,梯形经高斯投影后的面积大于在椭球面上的实际面积。随着梯形远离中央子午线,面积变形值和面积变形相对误差逐渐增大。在高斯投影 6°带边缘地区,面积变形相对误差达到 2.7‰。为了更直观地反映高斯投影后面积变形的趋势,以上表中的横坐标为自变量,以高斯投影面积变形相对误差为因变量,生成函数曲线<sup>[9]</sup>,如图 2。从曲线可以看出,高斯投影面积变形相对误差与横坐标呈抛物线关系。

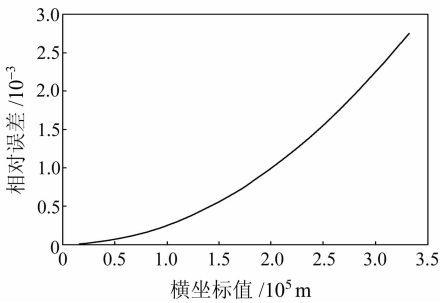


图 2 高斯投影面积变形曲线

Fig. 2 The area deformation curve of Gauss projection zone

2 基于变形曲线的抛物线拟合面积修正

高斯投影面积变形相对误差是横坐标值的抛物线函数,因此可根据最小二乘原则拟合该抛物线函数,对以高斯平面坐标计算的面积值进行修正<sup>[9-10]</sup>。设梯形在椭球面上的面积为  $S_T$ ,以高斯平面坐标计算的面积为  $S_G$ ,计算区域的横坐标平均值为  $y$ ,高斯投影面积变形相对误差为  $K$ 。

由  $K = \frac{S_G - S_T}{S_T}$ ,得  $S_T = \frac{S_G}{K + 1}$ 。

设图 2 中的抛物线方程为:

$$K = \varphi(y) = a_2\varphi_2(y) + a_1\varphi_1(y) + a_0\varphi_0(y) \tag{1}$$

式中,  $a_2$ 、 $a_1$ 、 $a_0$  为待定系数,基函数为  $\varphi_0(y) = 1$ ,

$\varphi_1(y) = y$ ,  $\varphi_2(y) = y^2$ 。记系数阵  $a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ 。代入

1 080 个梯形的计算数据,并记:

$$A = \begin{bmatrix} \varphi_0(y_0) & \varphi_1(y_0) & \varphi_2(y_0) \\ \varphi_0(y_1) & \varphi_1(y_1) & \varphi_2(y_1) \\ \varphi_0(y_2) & \varphi_1(y_2) & \varphi_2(y_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y_0 & y_0^2 \\ 1 & y_1 & y_1^2 \\ 1 & y_2 & y_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \varphi(y_0) \\ \varphi(y_1) \\ \varphi(y_2) \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_0 \\ K_1 \\ K_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

解法方程组  $A^T A a = A^T B$ ,得:

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.188\ 694\ 365\ 676\ 258 \times 10^{-7} \\ -6.997\ 528\ 248\ 732\ 948 \times 10^{-12} \\ 2.478\ 579\ 255\ 936\ 432 \times 10^{-14} \end{bmatrix}$$

将求得的系数及所选取的基函数代入式(1),得到所求的抛物线方程。曲线拟合的最小平方误差为:

$$\|r\|_2^2 = \|Aa - B\|_2^2 = 1.025 \times 10^{-11}$$

根据拟合的抛物线方程,以梯形在高斯平面直角坐标系中的横坐标平均值为参数,求出改正系数  $K$ ,便能对以高斯平面坐标计算的面积值进行修正。将修正后的面积与椭球面上的实际面积 9 4980.716 m<sup>2</sup> 比较得出,对于面积达 10 万 m<sup>2</sup> 的区域,抛物线拟合修正的梯形面积与椭球面上的实际面积差值,即使在投影带边缘也在 0.05 m<sup>2</sup> 以内(见表 2),面积变形相对误差在百万分之一以下。

分析得出,对位于 6°投影带边缘、经纬差为 1"的梯形,梯形椭球面面积为 949.807 m<sup>2</sup>,高斯投影面积为 952.433 m<sup>2</sup>,等面积投影面积为 949.813 m<sup>2</sup>,面积变形相对误差为 1/158 353;经抛物线拟合法修正后的面积为 949.807 m<sup>2</sup>,面积变形相对误差为 1/3 434 888。经计算,对于 2 万 m<sup>2</sup> 以下的区域,抛物线拟合面积修正法的精度明显优于等面积投影法。将梯形变换至不同纬度,所拟合的抛物线方程同样适用。

抛物线拟合面积修正法的面积变形相对误差如表 2 所示(以 10'间距列出)。表中横坐标值由梯形 4 个顶点的平均经度经高斯正算得到。

表 2 修正后的面积变形相对误差

Tab. 2 The relative errors of area deformation corrected by parabolic fitting

编号	横坐标值/m	修正后面积/m <sup>2</sup>	相对误差
1	154.613	94 980.695	1/4 585 605
61	18 708.203	94 980.705	1/8 643 168
121	37 261.952	94 980.713	1/34 228 628
181	55 816.018	94 980.719	1/29 710 529
241	74 370.560	94 980.723	1/13 443 493
301	92 925.735	94 980.725	1/10 524 602
361	111 481.703	94 980.725	1/10 185 159
421	130 038.620	94 980.724	1/11 480 551
481	148 596.645	94 980.722	1/15 247 672
541	167 155.937	94 980.720	1/26 309 688
601	185 716.652	94 980.717	1/106 961 271
661	204 278.951	94 980.715	1/67 377 324
721	222 842.992	94 980.713	1/35 175 538
781	241 408.932	94 980.714	1/40 493 573
841	259 976.931	94 980.716	1/273 497 484
901	278 547.147	94 980.722	1/15 503 074
961	297 119.738	94 980.732	1/6 013 160
1021	315 694.865	94 980.746	1/3 143 807
1080	333 963.032	94 980.766	1/1 903 312

注:梯形在椭球面上的真实面积为 94 980.716 m<sup>2</sup>。



[10] 武汉大学测绘学院测量平差学科组. 测量平差基础[M]. 武汉:武汉大学出版社,2009(The Surveying Adjustment Discipline Groups in School of Surveying and Mapping of Wu-

han University. Error Theory and Foundation of Surveying Adjustment[M]. Wuhan:Wuhan University Press,2009)

The Method of Area Calculation on the Ellipsoid  
Surface Based on Parabolic Fitting

LIU Yang<sup>1</sup> GAO Jingxiang<sup>1</sup> WANG Jian<sup>1</sup> LI Zengke<sup>1</sup>

1 Key Laboratory for Land Environment and Disaster Monitoring of NASMG, China University of Mining and Technology,  
1 Daxue Road, Xuzhou 221116, China

**Abstract:** Based on comprehensive analysis of the nature and magnitude of the deformation of area caused by the Gauss projection, the article defends a method of correcting the area deformation by parabolic fitting to calculate the area, taking into account the curvature of the Earth. It can convert the Gauss plane area to the spherical area on the surface of the ellipsoid directly, according to the average abscissa of area. The results show that this new method is not only simple in calculating, but also maintains high and stable precision, with the relative errors of the revised area at less than a millionth throughout the projection zone.

**Key words:** area of Gauss projection; area on the surface of ellipsoid; area deformation curve; parabolic fitting; method of correcting the area deformation

.....

(上接第 218 页)

Real-Time Dynamic Monitoring and Modeling for Large  
Building Based on GNSS

XU Keke<sup>1,2</sup> WU Jicang<sup>1</sup> ZHENG Erlong<sup>2</sup>

1 School of Surveying and Land Information Engineering, Henan Polytechnic University, 2001 Shiji Road, Jiaozuo 454001, China

2 College of Surveying and Geo-Informatics, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai 200092, China

**Abstract:** Displacement time series are calculated precisely at single epochs based on real-time and dynamic monitoring for large buildings by GNSS. It is found that the displacement has some prominent law, and the principal component of the displacement series is extracted by the spectral analysis method. The displacement forecasting model is established by high order harmonic function. Taking Tongji mansion for example, the forecasting result is consistent with actual observation series. The root mean square (RMS) is better than 3 mm in horizontal direction and 7 mm in the vertical direction. These results are significant for automatic deformation monitoring and issuing early warnings in the event of abnormal deformations of large buildings.

**Key words:** GNSS; dynamic monitoring; modeling; forecasting