

空间直线的结构总体最小二乘拟合

汪奇生^{1,2} 杨德宏² 杨腾飞²

1 湖南软件职业学院,湘潭市宝马西路,411100
2 昆明理工大学国土资源工程学院,昆明市文昌路 63 号,650093

摘 要: 提出结构总体最小二乘方法拟合空间直线,该方法能顾及三维坐标的误差,同时保证测量点到拟合直线的距离和最小。通过算例分析,验证了该方法的有效性和可行性。
关键词: 空间直线;结构总体最小二乘;拟合;迭代算法;平差模型
中图分类号: P207 **文献标识码:** A

三维空间直线拟合是通过一系列三维坐标点求解其空间直线方程。根据最佳平方逼近原则,所拟合的空间直线要满足所有三维坐标点到直线的距离和最小^[1-3]。文献[1]采用牛顿-梯度最优化算法逐步迭代来进行拟合,但该方法过程复杂,难以理解。文献[2]的推导过程比较繁琐。文献[3]将三维转换为二维来进行解算,虽然无需迭代,但通过软件将空间直线进行旋转操作,其解算过程不够直接明了。近年来,总体最小二乘法^[4-6]在测量数据处理中被广泛应用。本文首先将空间直线表示为两个平面方程,并引入结构总体最小二乘^[7]来考虑系数矩阵的结构性,这样便顾及到了坐标点 3 个方向的误差。根据系数矩阵的结构性,推导了结构总体最小二乘的迭代算法,算法推导过程及迭代格式都较为简单。最后,通过一个算例验证了本文方法的可行性和有效性。

1 空间直线的结构总体最小二乘拟合

1.1 空间直线函数模型

空间直线的标准方程为^[2]:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C} \tag{1}$$

将上式变换整理,得:

$$\begin{cases} x=\frac{A}{C}(z-z_0)+x_0=a+bz \\ y=\frac{A}{B}(z-z_0)+y_0=c+dz \end{cases} \tag{2}$$

这样,空间直线可以看成是用这两个方程表示的平

面的相交直线,其中一个平面垂直于面 xoz ,另一个平面垂直于面 $yo z$ 。求解这两个平面方程的参数,可进一步得到两个平面的法向量 $n_1=\{1\ 0\ -b\}$, $n_2=\{0\ 1\ -d\}$ 。由空间直线与平面方程的关系可知,空间直线的方向向量 s 垂直于两个平面方程的法向量:

$$s=n_1\times n_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & -d \end{vmatrix}=bi+dj+k \tag{3}$$

所求得的空间直线方向向量 $s=\{b\ d\ 1\}$,再由同时满足式(2)条件的公共点,可组成空间直线的标准方程。要求得式(2)的最优解,需要同时考虑空间三维坐标在 3 个方向的误差,即要满足 $\sum_{i=1}^m(V_{x_i}^2+V_{y_i}^2+V_{z_i}^2)=\min$,实质上就是解总体最小二乘问题。

1.2 空间直线的结构总体最小二乘模型

有多组观测数据时,式(2)的总体最小二乘平差(EIV)模型如下^[4]:

$$L+V_L=(A+E_A)X \tag{4}$$

其中,

$$L=\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \cdots \\ x_m \\ y_m \end{bmatrix},V_L=\begin{bmatrix} V_{x_1} \\ V_{y_1} \\ \cdots \\ V_{x_m} \\ V_{y_m} \end{bmatrix},A=\begin{bmatrix} 1 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_A = \begin{bmatrix} 0 & V_{z_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_{z_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & V_{z_m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & V_{z_m} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

可以发现,系数矩阵中并不是所有元素都有误差,只需改正 z_i 。系数矩阵具有结构规律,是一个结构总体最小二乘问题。根据文献[8],将EIV模型看成是非线性的,采用非线性最小二乘平差理论进行处理,将式(4)在 $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^0 + \hat{\mathbf{x}}$ 处展开得:

$(\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\mathbf{x} + \mathbf{FV}_A - \mathbf{V}_L + \mathbf{AX}^0 - \mathbf{L} = 0$ (5)
顾及到 $\mathbf{E}_A\mathbf{X}^0 = ((\mathbf{X}^0)^T \otimes \mathbf{I}_{2m})\mathbf{V}_A = \mathbf{FV}_A$, 其中 \otimes 为矩阵的克罗内克积。将系数矩阵的改正向量用结构矩阵来表示, $\mathbf{V}_A = \mathbf{DV}_a$, 其中 \mathbf{V}_a 是 $m \times 1$ 系数矩阵中含误差的非重复元素的改正数(数量为 m 个), \mathbf{D} 是 $8m \times m$ 的结构矩阵。由此,可将式(5)进一步表示为:

$(\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\mathbf{x} + \mathbf{RV} + \mathbf{AX}^0 - \mathbf{L} = 0$ (6)
顾及到 $\mathbf{R} = [-\mathbf{I}_{2m} \quad \mathbf{FD}]$ 为 $2m \times 3m$ 的矩阵, $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_L \quad \mathbf{V}_a]^T$ 为 $3m \times 1$ 的改正向量, \mathbf{I}_{2m} 为 $2m$ 阶单位矩阵,则此时的随机模型为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_L \\ \mathbf{V}_a \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{2m} & \\ & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \right)$$

或 $\mathbf{V} \sim [0, \sigma_0^2 \cdot \mathbf{I}_{3m}]$ (7)

总体最小二乘平差准则为:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \min$$
 (8)

根据平差准则可构造目标函数,其中 \mathbf{k} 为 $m \times 1$ 的拉格朗日常数向量。

$$\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} - 2\mathbf{k}^T ((\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\mathbf{x} + \mathbf{RV} + \mathbf{AX}^0 - \mathbf{L})$$
 (9)

根据拉格朗日求极值原理,求上式得最小值,则 $\boldsymbol{\varphi}$ 关于 \mathbf{V} 和 $\hat{\mathbf{x}}$ 的偏导要等于零:

$$\begin{aligned} \partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \mathbf{V} &= 2\mathbf{V}^T - 2\mathbf{k}^T \mathbf{R} = 0 \\ \partial \boldsymbol{\varphi} / \partial \hat{\mathbf{x}} &= 2\mathbf{k}^T (\mathbf{A} + \mathbf{E}_A) = 0 \end{aligned}$$
 (10)

将式(10)化简整理可得:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{R}^T \mathbf{k} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)^T \mathbf{k} &= 0 \end{aligned}$$
 (11)

根据式(11)并结合式(6)得:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{E}_A)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{RR}^T \mathbf{k} + \mathbf{AX}^0 - \mathbf{L} = 0$$
 (12)

根据式(12)可得拉格朗日常数 \mathbf{k} 的表达式,再由式(11)的第二式求出参数改正数的表达式:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\tilde{\mathbf{A}}^T (\mathbf{RR}^T)^{-1} \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{A}}^T (\mathbf{RR}^T)^{-1} (\mathbf{L} - \mathbf{AX}^0)$$
 (13)

式中, $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \mathbf{E}_A$ 为改正过的系数矩阵。求解最

终的参数需要逐步迭代进行。

1.3 解算步骤

具体解算步骤为:

1) 给参数赋初值 $\mathbf{X}^{(0)}$, 构造结构矩阵 \mathbf{D} (其结构矩阵将在下文给出)。设 $\mathbf{E}_A^{(0)} = 0$, 由参数初值 $\mathbf{X}^{(0)}$ 加上结构矩阵 \mathbf{D} 构造 $\mathbf{R}^{(0)}$ 。

2) 根据式(13)计算 $\hat{\mathbf{x}}$, 并根据 $\mathbf{X}^{0(i+1)} = \mathbf{X}^{0(i)} + \hat{\mathbf{x}}^{(i+1)}$, $\mathbf{V}^{(i+1)} = \mathbf{R}^{(i)T} \mathbf{k}^{(i+1)}$, $\mathbf{E}_A^{(i+1)} = \text{vec}^{-1}(\mathbf{V}_A^{(i+1)})$ 计算新的迭代值 $\mathbf{R}^{(i)}$, 其中 $\text{vec}^{-1}(\cdot)$ 表示 $\text{vec}(\cdot)$ 的逆运算, 即将 $mn \times 1$ 的列向量重新构造成 $m \times n$ 的矩阵。

3) 根据新值重复步骤2), 直到 $|\hat{\mathbf{x}}| < \epsilon$, 则停止迭代, 输出 \mathbf{X} 。

4) 由参数的估值可以得到式(2)的两个平面方程, 如需变换为式(1)的标准方程, 则根据式(3)计算即可。

2 算例及分析

取文献[3]中的算例, 即空间直线的一组实测数据(表1), 已知其中含有模型测量误差 $\delta = \pm 0.005$ 。

表1 一组空间直线实测数据
Tab. 1 Measured sample data of spatial straight line

x	y	z	Δ
3.003 6	2.996 0	3.004 1	0.002 5
4.003 4	4.998 0	6.003 3	0.000 9
5.005 0	6.999 2	9.005 0	0.002 1
5.996 4	9.003 6	11.996 2	0.008 6
7.003 2	10.996 8	15.002 4	0.002 9
8.003 8	13.000 1	18.004 5	0.001 9
9.001 0	15.004 0	20.999 6	0.004 3
9.997 2	16.999 3	23.998 2	0.002 7
11.001 1	18.996 2	27.000 1	0.003 5
11.999 7	20.998 0	29.997 8	0.001 1

根据本文方法, 计算过程中其结构矩阵构造方法为:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [\mathbf{D}_0^T \quad \mathbf{D}_1^T \quad \mathbf{D}_0^T \quad \mathbf{D}_2^T]^T \\ \mathbf{D}_0 &= \text{zeros}(20, 10) \\ \mathbf{D}_1 &= \text{blkdiag}(\underbrace{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1 \cdots \mathbf{R}_1}_{10}) \\ \mathbf{D}_2 &= \text{blkdiag}(\underbrace{\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_2 \cdots \mathbf{R}_2}_{10}) \\ \mathbf{R}_1 &= [1 \quad 0]^T \\ \mathbf{R}_2 &= [0 \quad 1]^T \end{aligned}$$

解算得到的方向向量为 $\boldsymbol{\alpha} = 0.333\ 248, \boldsymbol{\beta} = 0.666\ 823, \boldsymbol{\gamma} = 1$ 。与文献[2]和[3]的结果比较如表2所示(其中括号内是其转换为本文解算形式的共线向量)。各点到直线的误差见表1最后

表 2 各种方法解算结果比较

Tab. 2 Comparison of different method's result

	真值	文献[2]	文献[3]	本文方法
α	0.267 261(0.333 333)	0.267 180(0.333 248)	0.267 180(0.333 249)	0.333 248
β	0.534 522(0.666 666)	0.534 621(0.666 822)	0.534 622(0.666 824)	0.666 823
γ	0.801 784(1)	0.801 745(1)	0.801 744(1)	1
$\sum \Delta$	/	0.035 4	0.030 5	0.030 5

1 列所示。从表 2 可见,本文计算的结果与其他两种方法相近,且都接近于真值。本文方法和文献[3]的方法解算所得误差累计要比文献[2]小,且本文方法比文献[3]更加易于理解,计算方便。

3 结 语

- 1)将空间直线表示为两个平面方程,对空间直线进行拟合时采用结构总体最小二乘方法是可行的,解算的两个平面方程依然可以转换为空间直线的标准方程。
- 2)针对两个平面方程的解算,提出其结构总体最小二乘的迭代算法,算法推导过程及迭代格式较为简单,并通过算例分析验证了算法的正确性。

参考文献

[1] 杜明芳. 空间直线拟合[J]. 北京印刷学院学报,1996(8): 27-31 (Du Mingfang. Fitting of Space Straight Line[J]. Journal of Beijing Institute of Printing,1996(8): 27-31)

[2] 陈基伟. 工业测量数据拟合研究[D]. 上海: 同济大学,2005 (Chen Jiwei. Reacnch on Industrial Measurement Data Fitting[D]. Shanghai: Tongji University,2005)

[3] 郭际明,向巍,尹洪斌. 空间直线拟合的无迭代算法[J]. 测

绘通报,2011(2): 24-25 (Guo Jiming, Xiang Wei, Yin Hongbin. Three-Dimensional Line Fitting Without Iteration[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2011 (2): 24-25)

[4] Golub G H, Loan C. An Analysis of the Total Least Squares Problem[J]. SIAM Journal Numerical Analysis, 1980(17): 883-893

[5] 汪奇生,杨德宏,杨建文. 基于总体最小二乘的线性回归迭代算法[J]. 大地测量与地球动力学,2013,33(6): 112-114 (Wang Qisheng, Yang Dehong, Yang Jianwen. An Iteration Algorithm of Linear Regression Based on Total Least Squares[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2013,33 (6):112-114)

[6] 汪奇生,杨德宏,杨腾飞. 总体最小二乘线性回归统一模型及解算[J]. 工程勘察,2014 (4): 87-90 (Wang Qisheng, Yang Dehong, Yang Tengfei. The Unified Model and Algorithm of Total Least Squares Linear Regression [J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2014(4):87-90)

[7] Moor B. Structured Total Least Squares and L2 Approximation Problems[J]. Linear Algebra and Its Applications, 1993(188):163-205

[8] Shen Y, Li B,Chen Y. An Iterative Solution of Weighted Total Least-Squares Adjustment[J]. Journal of Geodesy, 2010, 85(4) : 229-238

Structured Total Least Squares for Space Straight Line Fitting

WANG Qisheng^{1,2} YANG Dehong² YANG Tengfei²

1 Hunan Software Vocational Institute, West-Baoma Road, Xiangtan 411100, China

2 Faculty of Land Resource Engineering, Kunming University of Science and Technology, 63 Wenchang Road, Kunming, 650093

Abstract: A method of structured total least squares for space straight line fitting is presented. It considers the errors of three-dimensional coordinates and ensures the sum of distance from points to a line is least. The examples show that the method is reliable and effective.

Key words: space straight line; structured total least squares; fitting; iteration algorithm; adjustment model

本刊微信公众号 dadiceliang, 敬请关注。

