DOI:10.14075/j.jgg.2015.04.034
文章编号:1671-5942(2015)04-0697-05

几种坐标转换计算方法的比较

宫晓春[1] 吕志平[1] 王宇谱[1] 吕 浩[1] 王 宁[1]

1 信息工程大学地理空间信息学院,郑州市科学大道 62 号,450001

摘 要:分析最小二乘配置模型在小角度坐标转换中的应用;运用实验分析最小二乘模型、改进的布尔莎模型以及多元总体最小二乘模型在任意旋转角度坐标转换中的应用,并分析尺度因子和旋转角对坐标转换的影响;证明多元总体最小二乘可以高精度地实现任意尺度因子、任意旋转角度的三维坐标转换。

关键词:坐标转换;最小二乘;最小二乘配置;布尔莎模型;多元总体最小二乘

中图分类号:P226 **文献标识码**:A

坐标转换广泛应用于大地坐标基准转换、摄影测量解析空间坐标旋转变换以及工程测量独立坐标系换算等领域[1-2]。文献[3-7]研究了非线性坐标转换的解法,文献[8]将最小二乘配置应用于二维坐标转换,文献[9]通过最小二乘迭代计算解决任意角度三维坐标转换的问题,文献[10-11]将改进的布尔莎模型应用于三维坐标转换,文献[12]将多元总体最小二乘方法引入坐标转换,文献[13-17]也对总体最小二乘、多元总体最小二乘的解法进行了研究。目前关于坐标转换的研究主要是新的算法,或是对一些算法进行改进以及坐标转换方法的具体应用,缺少对较常用方法的比较与分析。同时,对于尺度因子和旋转角度对坐标转换的影响缺少相关研究。

本文首先将最小二乘配置推广到三维小角度(秒级)[18]坐标转换,并分析公共点数目较少时的坐标转换方法。同时运用改进的布尔莎模型、最小二乘迭代以及多元总体最小二乘,对任意旋转角度的坐标转换进行解算并比较,分析尺度因子和旋转角度对转换精度的影响。

1 小角度坐标转换的最小二乘配置模型

三维坐标转换模型为:

$$\begin{bmatrix}X_B\\Y_B\\Z_B\end{bmatrix}=(1+m)\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}X_A\\Y_A\\Z_A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}T_X\\T_Y\\T_Z\end{bmatrix} \tag{1}$$

$\boldsymbol{R}$ 可表示为[2]:

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\omega_Y\cos\omega_Z & \cos\omega_Y\sin\omega_Z & -\sin\omega_Y\\ -\cos\omega_X\sin\omega_Z+\sin\omega_X\sin\omega_Y\cos\kappa_Z & \cos\omega_X\cos\kappa_Z+\sin\omega_X\sin\omega_Y\sin\kappa_Z & \sin\omega_X\cos\omega_Y\\ \sin\omega_X\sin\omega_Z+\cos\omega_X\sin\omega_Y\cos\omega_Z & -\sin\omega_X\cos\omega_Z+\cos\omega_X\sin\omega_Y\sin\omega_Z & \cos\omega_X\cos\omega_Y\end{bmatrix} \tag{2}$$

其中,$[X_B,Y_B,Z_B]^{\mathrm{T}}$ 为新坐标系统中的坐标,$[X_A,Y_A,Z_A]^{\mathrm{T}}$ 为旧坐标系统中的坐标,$[T_X,T_Y,T_Z]^{\mathrm{T}}$ 为平移量,ω_X、ω_Y、ω_Z 为欧拉角。

当旋转角度较小时,$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}1&\omega_Z&-\omega_Y\\-\omega_Z&1&\omega_X\\\omega_Y&-\omega_X&1\end{bmatrix}$,

故式(1)可转化为:

$$\begin{bmatrix}X_B\\Y_B\\Z_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_A\\Y_A\\Z_A\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0&0&-Z_A&Y_A&X_A\\0&1&0&Z_A&0&-X_A&Y_A\\0&0&1&-Y_A&X_A&0&Z_A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_X\\T_Y\\T_Z\\\omega_X\\\omega_Y\\\omega_Z\\m\end{bmatrix} \tag{3}$$

其对应的矩阵表达式为:

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{\Delta} \tag{4}$$

收稿日期:2014-07-14
项目来源:国家自然科学基金(41274015);国家 863 计划(2013AA122501);信息工程大学地理空间信息学院硕士学位论文创新与创优基金(ZS201501)。

第一作者简介:宫晓春,硕士生,主要从事测量数据处理理论与方法研究,E-mail:gxc9090@126.com。

式中，$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}X_B\\Y_B\\Z_B\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}X_A\\Y_A\\Z_A\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-Z_A&Y_A&X_A\\0&1&0&Z_A&0&-X_A&Y_A\\0&0&1&-Y_A&X_A&0&Z_A\end{bmatrix}$$

按最小二乘原理，可求得：

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L} \tag{5}$$

式(5)即为小角度坐标转换的最小二乘解法。考虑未模型化部分的影响，在式(4)加入改正项$\boldsymbol{S}$，即只对邻近点有系统影响的信号，可得：

$$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{S}+\boldsymbol{\Delta} \tag{6}$$

式(6)即为三维空间直角坐标转换的最小二乘配置模型(LSC)。式中，

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}S_{X_1}&S_{Y_1}&S_{Z_1}&\cdots&S_{X_m}&S_{Y_m}&S_{Z_m}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}T_X&T_Y&T_Z&\omega_X&\omega_Y&\omega_Z&m\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其中，m 为新旧坐标系中公共点个数。由文献[8]可推得 m 个公共点的协方差阵：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{S}}=\begin{bmatrix}\sigma^2&0&0&\sigma_{12}&0&0&\cdots&\sigma_{1m}&0&0\\0&\sigma^2&0&0&\sigma_{12}&0&\cdots&0&\sigma_{1m}&0\\0&0&\sigma^2&0&0&\sigma_{12}&\cdots&0&0&\sigma_{1m}\\\sigma_{21}&0&0&\sigma^2&0&0&\cdots&\sigma_{2m}&0&0\\0&\sigma_{21}&0&0&\sigma^2&0&\cdots&0&\sigma_{2m}&0\\0&0&\sigma_{21}&0&0&\sigma^2&\cdots&0&0&\sigma_{2m}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\sigma_{m1}&0&0&\sigma_{m2}&0&0&\cdots&\sigma^2&0&0\\0&\sigma_{m1}&0&0&\sigma_{m2}&0&\cdots&0&\sigma^2&0\\0&0&\sigma_{m1}&0&0&\sigma_{m2}&\cdots&0&0&\sigma^2\end{bmatrix} \tag{7}$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{S}}$ 中的元素采用高斯正定函数求得：

$$\sigma(d)=\sigma_{\mathrm{S}}^2(0)\exp(-k^2d^2) \tag{8}$$

其中，d 为两坐标点之间的距离。拟合式(8)：

$$\begin{cases}\sigma(d_1)=\sigma_{\mathrm{S}}^2(0)\exp(-k^2d_1^2)\\\cdots\\\sigma(d_n)=\sigma_{\mathrm{S}}^2(0)\exp(-k^2d_n^2)\end{cases} \tag{9}$$

$\sigma(d_i)$、$d_i(i=1,2\cdots,n)$的求法见文献[8]。由式(9)按最小二乘解得 $\sigma_{\mathrm{S}}^2(0)$、k^2，然后代入式(8)，可求得 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{S}}$ 中各元素的值。由于噪声向量 $\boldsymbol{\Delta}$ 各分量随机独立，且各分量的方差相等，可知：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta}=\begin{bmatrix}\sigma_{\Delta}^2&0&0&0\\0&\sigma_{\Delta}^2&0&0\\0&0&\cdots&0\\0&0&0&\sigma_{\Delta}^2\end{bmatrix} \tag{10}$$

由文献[8]可求得 σ_{Δ}^2，从而解得 $\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta}$。又

$$\boldsymbol{\Sigma}_L=\boldsymbol{\Sigma}_{\Delta}+\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{S}} \tag{11}$$

根据最小二乘原理，对式(6)进行求解，可得：

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_L^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_L^{-1}\boldsymbol{L} \tag{12}$$

实际中经常遇到两坐标系统公共点较少的情况，上述解法便不再适用。文献[8,19]提出直接确定 $\sigma_{\mathrm{S}}^2(0)$、k^2 的方法，即假设信号占主要地位，不考虑噪声方差，直接用残差的方差代替信号方差[19]。

应用文献[20]中的某地公共点在两个坐标系下的空间直角坐标真值(表1)，分别应用上述方法和最小二乘方法对转换参数及转换精度 σ 进行求解。当 $R=\exp(-k^2d_{\max}^2)=10^{-20}$ 时，坐标转换中误差 σ 稳定在0.026 2(表2)。

表1 公共点坐标

Tab.1 Common point coordinates

点号	X_A	Y_A	Z_A	X_B	Y_B	Z_B
1	−2 066 241.500 1	5 360 801.883 5	2 761 896.302 2	−2 066 134.489 6	5 360 847.059 5	2 761 895.597 0
2	−1 983 936.040 7	5 430 615.728 2	2 685 375.721 4	−1 983 828.708 4	5 430 658.982 7	2 685 374.668 1
3	−1 887 112.730 2	5 468 749.194 4	2 677 688.980 6	−1 870 005.171 4	5 468 790.648 7	2 677 687.268 0
4	−1 808 505.421 2	5 512 502.271 6	2 642 356.572 0	−1 808 397.726 0	5 512 542.092 1	2 642 354.455 0
5	−1 847 017.067 0	5 573 542.793 4	2 483 802.990 4	−1 846 909.003 6	5 573 582.651 1	2 483 801.614 7

表2 不同 R 下的坐标转换中误差

Tab.2 Mean square error of coordination transformation under different R

R	10^{-10}	10^{-13}	10^{-15}	10^{-17}	10^{-20}	10^{-23}	10^{-25}
σ	0.026 256	0.026 224	0.026 213	0.026 206	0.026 201	0.026 199	0.026 199

由此说明，上述方法并未改进坐标转换的精度。因此，对表1中坐标计算的残差向量，可不考虑信号的影响，直接利用方法较简单的最小二乘解算。

2 任意旋转角度坐标转换算法比较

在近似值 $X^0(\mathrm{d}X_0,\mathrm{d}Y_0,\mathrm{d}Z_0,u_0,\omega_{X0},\varphi_{Y0},\kappa_{Z0})$ 处对式(1)Taylor展开，$u=m+1$。根据文献[9]求取七参数改正值，然后进行迭代计算，直至参数改正值满足某一限差时停止迭代，从而求出任意旋转角度的坐标转换参数。迭代初值 X^0 可由式(5)求得。

由式(1)可知，如果已知旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$ 和尺度因子 m，就可求出平移参数。文献[10-11]提出

改进的布尔莎模型,运用罗德里格矩阵求出 $\boldsymbol{R}$ 的近似值,再进行迭代计算,最终求出转换参数。

为避免矩阵线性化引起的误差,可根据多元线性回归分析原理直接解算旋转矩阵,并将两套坐标系统的坐标重心化,建立多元总体最小二乘模型(MTLS),采用文献[15]的方法解算转换参数。

为比较上述方法的转换精度,选取 8 个被转换坐标系的坐标点(表 3),按照设计的转换参数求解目标坐标系下的坐标值。对两坐标系下的坐标加入 0.01 m 的随机误差,以模拟实际坐标。运用 MATLAB 对各方案进行转换参数的求解,并计算坐标转换中误差 σ。设计的转换参数为:$T_X=100$ m,$T_Y=120$ m,$T_Z=210$ m,其他见表 4。

表 3　公共点坐标

Tab. 3　Common point coordinates

点号	1	2	3	4	5	6	7	8
X/m	1 000	1 000	1 000	1 000	−1 000	−1 000	−1 000	−1 000
Y/m	1 000	−1 000	1 000	−1 000	1 000	−1 000	1 000	−1 000
Z/m	1 000	1 000	−1 000	−1 000	1 000	1 000	−1 000	−1 000

表 4　坐标转换参数

Tab. 4　Coordination transformation parameter

旋转角 尺度因子	ωX /(″)	ωY /(″)	ωZ /(″)	ωX /(°)	ωY /(°)	ωZ /(°)	ωX /(°)	ωY /(°)	ωZ /(°)
	10	20	30	1	2	3	0.1	0.2	0.3
0.001	方案 A-1			方案 B-1			方案 C-1		
0.92	方案 A-2			方案 B-2			方案 C-2		
2.5	方案 A-3			方案 B-3			方案 C-3		

表 5 中,从方案 A-1 到 A-2,旋转角度相同,尺度因子增大,LS 迭代的坐标转换中误差 σ 增大,故其坐标转换精度降低;从方案 A-1 到 A-2 再到 A-3,旋转角度相同,尺度因子增大,改进 Bursa 以及 MTLS 的坐标转换精度都降低。对于方案 B-1、B-2、B-3 以及方案 C-1、C-2、C-3 也可以得到相同的结论。从表 5 纵向看,从方案 A-1 到 B-1 再到 C-1,尺度因子相同,旋转角度减小,LS 迭代、改进 Bursa 以及 MTLS 的坐标转换中误差 σ 减小,其坐标转换精度提高。对于方案 A-2、B-2、C-2 以及方案 A-3、B-3、C-3 也可以得到相同的结论。故平移参数固定时,坐标转换精度随尺度因子和旋转角度的减小而提高。

在尺度因子较小时(尺度因子为 0.001 的方案),最小二乘迭代可达到与多元总体最小二乘几乎相同的转换参数。在尺度因子较大时(尺度因子为 2.5),最小二乘迭代无法实现转换参数的求解,这是因为最小二乘迭代的初始值与真值的偏差随着尺度因子的增加而增大。受此影响,解算结果不正确或不收敛。

由表 5 可知,多元总体最小二乘(MTLS)可以实现 9 种方案的坐标转换。对比各方案中每种算法的坐标转换中误差 σ,MTLS 的坐标转换精度比改进 Bursa 及 LS 迭代更高,故多元总体最

表 5　坐标转换解算结果

Tab. 5　Calculated results of coordination transformation

	方案 A-1			方案 A-2			方案 A-3	
	LS 迭代	改进 Bursa	MTLS	LS 迭代	改进 Bursa	MTLS	改进 Bursa	MTLS
T_X/m	99.996 806	99.996 806	99.996 806	99.994 673 8	99.994 673 8	99.994 673 8	100.010 39	100.010 642
T_Y/m	119.993 241	119.993 241	119.993 241	120.000 185	120.000 185	120.000 185	119.990 755	119.990 55
T_Z/m	210.004 822	210.004 822	210.004 822	209.996 654	209.996 654	209.996 654	210.008 649	210.008 67
ωX/(°)	10.004 901 8	10.004 921 2	10.004 901 8	10.005 024	10.003 812 1	10.004 546 9	10.000 271 5	10.004 605 8
ωY/(°)	20.007 398 9	20.007 487 9	20.007 398 9	20.011 682 5	20.002 641 1	20.007 596	19.999 824 3	20.007 567
ωZ/(°)	30.001 690 1	30.001 685 3	30.001 690 1	30.005 516 2	30.000 448 1	30.001 477 9	29.999 983 6	30.001 501 3
m	0.001 043 72	0.001 043 72	0.001 043 73	0.920 078 7	0.920 078 71	0.920 078 74	2.500 004 89	2.500 145 93
σ	0.139 268 71	0.139 275 1	0.139 268 71	0.311 386 02	0.303 408 73	0.268 379 58	0.688 345 05	0.504 368 83
	方案 B-1			方案 B-2			方案 B-3	
	LS 迭代	改进 Bursa	MTLS	LS 迭代	改进 Bursa	MTLS	改进 Bursa	MTLS
T_X/m	99.999 218 5	99.999 218 5	99.999 218 5	99.998 360	100.013 376	99.998 36	99.996 683 9	99.996 681 3
T_Y/m	120.005 537	120.005 537	120.005 537	120.004 118	120.009 935	120.004 118	120.011 24	120.011 237
T_Z/m	210.006 159	210.006 159	210.006 159	210.002 185	209.996 265	210.002 185	210.009 788	210.009 784
ωX/(°)	0.999 919 14	0.999 977 08	0.999 919 2	1.000 463 75	0.999 770 74	1.000 256 51	1.000 077 64	1.000 192 26
ωY/(°)	1.999 670 17	1.999 655 2	1.999 670 2	2.000 331 65	1.999 401 65	1.999 886 74	2.000 304 01	1.999 991 3
ωZ/(°)	2.999 983 84	3.000 009 12	2.999 983 87	3.001 101 73	2.999 181 25	3.000 451 03	2.999 763 07	3.000 081 83
m	0.001 003 48	0.001 003 48	0.001 003 48	0.919 995 6	0.919 998 9	0.919 995 6	2.500 019 04	2.500 013 65
σ	0.011 611 29	0.011 648 8	0.011 611 29	0.034 214 98	0.030 085 058	0.025 672 38	0.047 721 62	0.041 253 87
	方案 C-1			方案 C-2			方案 C-3	
	LS 迭代	改进 Bursa	MTLS	LS 迭代	改进 Bursa	MTLS	改进 Bursa	MTLS
T_X/m	99.996 131 6	99.996 131 6	99.996 131 6	100.018 081	100.018 081	100.018 081	100.006 125	100.006 125
T_Y/m	120.002 155	120.002 155	120.002 155	119.991 43	119.991 43	119.991 43	120.007 039	120.007 039
T_Z/m	209.996 411	209.996 411	209.996 411	209.994 612	209.994 612	209.994 612	210.020 582	210.020 582
ωX/(°)	0.099 658 95	0.099 810 09	0.099 658 89	0.100 183 78	0.100 082 35	0.100 161 8	0.100 539 47	0.100 048 5
ωY/(°)	0.199 946 36	0.200 088 09	0.199 946 4	0.200 238 57	0.200 200 62	0.200 194 4	0.200 439 44	0.200 122 1
ωZ/(°)	0.299 961 57	0.299 768 41	0.299 961 57	0.300 162 51	0.299 741 44	0.300 096 56	0.299 842 23	0.300 005 91
m	0.001 002 46	0.001 004 93	0.001 002 46	0.919 999 76	0.919 997 91	0.919 999 76	2.500 004 33	2.500 002 68
σ	0.010 199 71	0.011 291 56	0.010 199 71	0.015 846 02	0.016 550 07	0.015 678 24	0.045 959 26	0.033 928 8

小二乘可以高精度地实现任意尺度因子、任意旋转角度的三维坐标转换。

3 结 语

1)在三维小角度坐标转换中,最小二乘配置模型既考虑偶然误差的影响,又考虑信号的影响,模型更加合理。对于存在似系统误差的实际坐标,理论上转换精度更好。而一般的大地基准变换多为小角度变换,故建议采用最小二乘配置模型。实际中,当公共点数目较少时,难以对协方差函数进行拟合。需要综合分析信号和噪声对残差的影响效果,以便选择恰当的方法。

2)最小二乘迭代可以实现任意旋转角度的三维坐标转换,迭代次数随着旋转角度的增加而增加。尺度因子较小时,最小二乘迭代可以实现高精度的坐标转换,但最小二乘迭代不能实现较大尺度因子的坐标转换。

3)改进的布尔莎模型可以实现任意尺度、任意旋转角的坐标转换,转换精度与最小二乘迭代相差不大。

4)多元总体最小二乘也可以实现任意尺度、任意旋转角的坐标转换,转换精度比改进的布尔莎模型和最小二乘迭代更高,且转换效率更好。该方法既考虑了控制点的两套坐标都有误差的情况,又考虑了系数矩阵存在误差的问题,模型合理,但计算过程较复杂。

参考文献

[1] Yang Y X. Robust Estimation of Geodetic Datum Transformation[J]. Journal of Geodesy, 1999(3):68-274

[2] 吕志平,乔书波. 大地测量学基础[M]. 北京:测绘出版社,2011(Lü Zhiping, Qiao Shubo. Foundation of Geodesy [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2011)

[3] 陈义,沈云中,刘大杰. 适用于大旋转角的三维基准转换的一种简便模型[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2004,29(12):1 110-1 105(Chen Yi, Shen Yunzhong, Liu Dajie. A Simplified Model of Three Dimensional - Datum Transformation Adapted to Big Rotation Angle[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2004,29 (12): 1 110-1 105)

[4] 曾怀恩,黄声享. 三维坐标转换参数求解的一种直接搜索法[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2008,33(11):1 118-1 111(Zeng Huai'en, Huang Shengxiang. A Kind of Direct Search Method Adapted to Solution of 3D Coordinate Transformation Parameters[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2008,33(11):1 118-1 111)

[5] Grafarend E W, Awange J L. Nonlinear Analysis of the Three-Dimensional Datum Transformation[J]. Journal of Geodesy, 2003, 77: 66-76

[6] 袁庆,楼立志,陈玮娴. 加权总体最小二乘在三维基准转换中的应用[J]. 测绘学报,2011,40 (S1):115-119(Yuan Qing, Lou Lizhi, Chen Weixian. The Application of the Weighted Total Least-Squares to Three Dimensional Datum Transformation [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011, 40(S1): 115-119)

[7] 吕志平,魏子卿,李军,等. CGCS2000高精度坐标转换格网模型的建立[J]. 测绘学报,2013,42(6):791-797(Lü Zhiping, Wei Ziqing, Li Jun, et al. The Establishment of High Precise Coordinate Trasformation Grid Model of CGCS2000 [J]. Acta Geodaetica et Cartographical Sinca, 2013, 42 (6): 791-797)

[8] 黄维彬. 近代平差理论及其应用[M]. 北京:解放军出版社,1990(Huang Weibin. Modern Adjustment Theory and Its Application [M]. Beijing: Press of PLA, 1990)

[9] 姚宜斌,黄承猛,李程春,等. 一种适用于大角度的三维坐标转换参数求解算法[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2012,37(3):253-256(Yao Yibin, Huang Chengmeng, Li Chengchun, et al. A New Algorithm for Solution of Transformation Parameters of Big Rotation Angles 3D Coordinate[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2012,37(3):253-256)

[10] 张萌,杨志勇,丁克良. 基于改进的布尔莎-沃尔夫模型的任意旋转角坐标转换方法的研究[J]. 北京测绘,2013(1): 16-19(Zhang Meng, Yang Zhiyong, Ding Keliang. Research on an Improved Bursa-Wolf Model for 3D Coordinate Transformation[J]. Beijing Surveying and Mapping, 2013 (1):16-19)

[11] 姚吉利,韩保民,杨元喜. 罗德里格矩阵在三维坐标转换严密解算中的应用[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2006,31 (12):1 094-1 096(Yao Jili, Han Baomin, Yang Yuanxi. Applications of Lodrigues Matrix in 3D Coordinate Transformation [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2006, 31(12): 1 094-1 096)

[12] Alexander K, Sanbine V H. Consistency of Elementwise-Weighted Total Least Squares Estimator in A Multivariate Errors-in-variables Model $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$[J]. Metrika,2004,59:75-97

[13] Yaron A F, Robert C B. On Symmetrical Three-Dimensional Datum Conversion[J]. GPS Solution, 2009,13:65-74

[14] 葛旭明,伍吉仓. 三维基准转换的约束加权混合整体最小二乘的迭代解法[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2012, 37(2):178-182(Ge Xuming, Wu Jicang. Iterative Method of Weight Constraint Total Least-Squares for Three-Dimensional Datum Transformation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2012, 37(2): 178-182)

[15] 黄令勇,吕志平,任雅奇,等. 多元总体最小二乘在三维坐标转换中的应用[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2014,39(7):793-798(Huang Lingyong, Lü Zhiping, Ren Yaqi, et al. Application of Multivariate Total Least Square in Three-Dimensional Coordinate Transformation [J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2014, 39(7): 793-798)

[16] 杨仕平,范东明,龙玉春. 基于整体最小二乘法的任意旋转角度三维坐标转换[J]. 大地测量与地球动力学,2013,(2): 114-119(Yang Shiping, Fan Dongming, Long Yuchun. Three-Dimensional Coordination Transformation Adapted

to Arbitrary Rotation Angle Based on Total Least Squares Method.[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2013, (2):114-119)

[17] Shen Y Z, Li B F, Chen Y. An Iterative Solution of Weighted Total Least Squares Adjustment[J]. Journal of Geodesy, 2011, 85:229-238

[18] 曾文宪,陶本藻.三维坐标转换的非线性模型[J].武汉大学学报:信息科学版,2003,28(5):566-568(Zeng Wenxian, Tao Benzao. Non-Linear Adjustment Model of Three-Dimensional Coordinate Transformation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2003,28 (5):566-568)

[19] 唐淑贤.最小二乘配置法在航测区域网平差和三角网坐标转换中的应用[J].测绘通报,1989(1):23-25(Tang Shuxian. Application of Least Squares Collocation in Aerial Area Network Adjustment and Triangulation Coordinates Transformation [J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 1989 (1):23-25)

[20] 武汉大学测绘学院测量平差学科组.误差理论与测量平差基础[M].武汉:武汉大学出版社,2003(School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University. Error Theory and Foundation of Surveying Adjustment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2003)

Comparison of Calculation Methods of Several Coordinate Transformation

GONG Xiaochun[1]　*LÜ Zhiping*[1]　*WANG Yupu*[1]　*LÜ Hao*[1]　*WANG Ning*[1]

1　School of Geography Spatial Information, Information Engineering University, 62 Kexue Road, Zhengzhou 450001, China

Abstract: The least square configuration model is analyzed in the application of small angle coordinate transformation. The least square, improved bursa, and multivariate total least square models are analyzed in the application of arbitrary angle coordinate transformation, as well as for the impacts of scale factor and rotation angle on coordinate transformation precision by experiment. It is proven that the multivariate total least square model can achieve high-precision coordinate transformation of arbitrary scale factor and rotation angle.

Key words: coordinate transformation; least square; least square collocation; Bursa model; multivariate total least square

(上接第 692 页)

[9] 胡川,陈义. 解加权总体最小二乘平差问题的一种新方法[J]. 大地测量与地球动力学,2012, 32(6): 106-110(Hu Chuan, Chen Yi. An Innovation Algorithm for Solution of Weighted Total Least Squares Adjustment[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2012,32(6): 106-110)

Comparisons of Total Least Squares and Least Squares for Fitting Spatial Lines

HU Chuan[1]　*CHEN Yi*[1,2]　*ZHU Weidong*[3]　*QIAN Chengjun*[1]

1　College of Surveying and Geo-informatics, Tongji University, 1239 Siping Road, Shanghai 200092, China

2　Key Laboratory of Modern Engineering Surveying, NASMG, 1239 Siping Road, Shanghai 200092, China

3　College of Marine Sciences, Shanghai Ocean University, 999 Huchenghuan Road, Shanghai, 200120, China

Abstract: In this contribution, an iterative algorithm of total least squares is organized for fitting spatial lines. We projected spatial straight lines to coordinate planes perpendicularly, and then total least squares (TLS) and least squares (LS) are employed to fit the plane's lines. A simulated experiment with three scenarios is designed to compare the estimated parameters and the variance of unit weight from TLS and LS, respectively. In scenario one, the error of all points is normally distributed with zero mean and identical standard deviation. In the second scenario, the error of each point is normally distributed with zero mean and different standard deviation. In scenario three, the error of point coordinate components is normally distributed with zero mean and different standard deviation. In addition, in a second experiment, a set of laser scanned data points are fitted by TLS and LS, respectively.

Key words: weighted total least squares; least squares; spatial straight line; 3D laser scan ; fitting