

# 基于载波相位 DGNSS/INS 紧组合的 平滑后处理算法

郝万亮<sup>1,2</sup> 孙付平<sup>1</sup> 刘 帅<sup>1</sup>

<sup>1</sup> 信息工程大学导航与空天目标工程学院,郑州市科学大道 62 号,450052

<sup>2</sup> 解放军 71687 部队,新乡市,453000

**摘 要:** 针对高精度的定位定姿需求,提出一种基于差分载波相位/惯导紧组合的平滑后处理算法。通过双卡尔曼滤波器实现模糊度的解算以及对导航状态误差和惯性器件误差的估计,利用 RTS 平滑对数据进行后处理。实测数据表明,该算法能得到较高的定位定姿和测速精度。

**关键词:** 定位定姿;DGNSS/INS;固定区间平滑;双卡尔曼滤波器;后处理

**中图分类号:** P228.42

**文献标识码:** A

全球卫星导航系统(global navigation satellite system,GNSS)和惯性导航系统(inertial navigation system,INS)具有良好的互补特性,因此 GNSS/INS 组合成为组合导航领域主要的方法。近几年来,随着 GNSS/INS 组合精度的不断提高,应用范围不断扩大,逐渐渗透到高精度的测绘领域,在军事侦察、机载航空摄影测量、车载移动测图、船载重力磁力测量和自然灾害预警监测等方面发挥了重要作用<sup>[1,2]</sup>。一个典型的应用就是高精度的位置姿态系统(positioning and orientation system,POS),它主要由惯性测量单元(inertial measurement unit,IMU)、基准站和移动站 GNSS 接收机以及处理计算机组成<sup>[3]</sup>,通过对 GNSS 和 INS 数据的处理获得高精度的位置和姿态信息。POS 系统不仅在卫星观测条件良好时可以提供较高的精度,而且在可见卫星数较少甚至无可见星的时候,通过对数据的后处理仍然能保持一定的精度<sup>[4]</sup>。因此,高精度的后处理算法是 POS 系统的核心技术之一。国内 POS 系统发展缓慢,一方面是由于国产的惯性器件精度较低,另一方面对于高精度的数据后处理技术的研究相对较少。本文旨在通过对 GNSS 和 INS 数据的处理,探索高精度的数据处理算法。

## 1 算法设计

在高精度的 DGNSS/INS 组合系统中,整周

模糊度的解算是首先要解决的问题。常用方法是将模糊度参数和惯性器件误差以及载体的运动状态误差列为卡尔曼滤波器的状态变量,但这种方法将导致滤波器阶数增加,且随着观测卫星数的增多,运算量变大,在恶劣环境下使用较为困难<sup>[5]</sup>。利用双卡尔曼滤波器的方式来实现,可降低滤波器阶数。另一方面,在一些高精度的测绘领域,对实时性要求不高时,可通过对数据的平滑后处理得到较高的精度,尤其是对于卫星信号失锁严重的时间段,其性能更加优越。本文所述算法如图 1 所示。

系统的原始数据由 IMU 输出的比力和角速度信息,基站 GNSS 接收机和移动站 GNSS 接收机输出的原始伪距、载波相位、多普勒观测值以及相应的星历文件组成。数据处理包括 3 部分:1)整周模糊度的解算,主要由次卡尔曼滤波器和 LAMBDA 算法构成。次卡尔曼滤波器通过两个测站的观测数据和惯导的辅助,进行模糊度浮点解及其协方差阵的估计,模糊度的固定则由 LAMBDA 算法实现。2)导航参数误差和惯性器件误差的估计,由主卡尔曼滤波器完成。采用双差紧组合模式对误差进行估计,突破了可见卫星数需大于 4 颗的限制。只要有双差观测量就可以进行量测信息的更新,滤波完成后实行闭环修正。3)数据后处理,通过反向滤波技术实现。对主卡尔曼滤波器的输出信息进行反向 RTS 平滑,一方

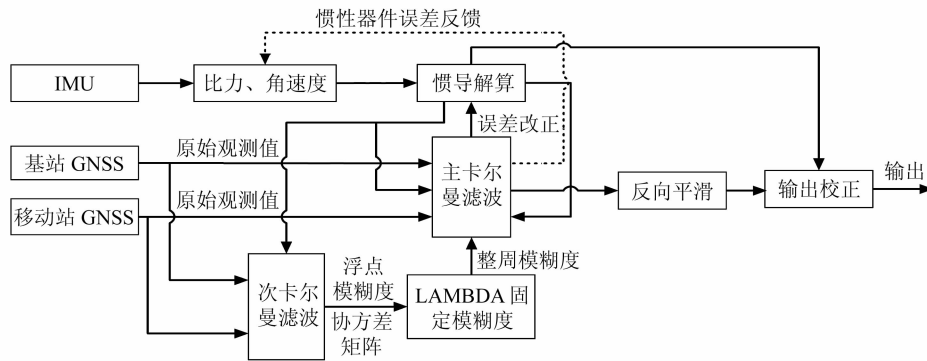


图1 算法处理结构

Fig. 1 Algorithm processing structure

面可以减小随机误差的影响,另一方面对卫星信号失锁段的数据进行处理,提高整个系统的定位定姿精度。

## 2 滤波模型

滤波模型由主卡尔曼滤波器和次卡尔曼滤波器组成。为了将二者加以区别,主卡尔曼滤波器的状态方程和量测方程用上标  $z$  表示,次卡尔曼滤波器用上标  $c$  表示。

### 2.1 次卡尔曼滤波器

次卡尔曼滤波器主要完成浮点模糊度及其协方差矩阵的估计。滤波器的状态方程为:

$$\mathbf{X}_k^c = \Phi_{k,k-1}^c \mathbf{X}_{k-1}^c + \Gamma_{k-1}^c \mathbf{W}_{k-1}^c \quad (1)$$

式中,状态变量  $\mathbf{X}_k^c = [x_k \ y_k \ z_k \ \nabla\Delta N_k^{21} \ \nabla\Delta N_k^{31} \dots \nabla\Delta N_k^{n1}]^T$ ,  $(x_k, y_k, z_k)$  为移动站位置估计,  $\nabla\Delta N$  为双差载波相位整周模糊度,  $n$  为共视卫星数,状态向量中包括  $n-1$  个整周模糊度参数。

$$\Phi_{k,k-1}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{k-1}^c = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_{3 \times (n-1)} \\ \mathbf{0}_{(n-1) \times (n-1)} & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{W}_{k-1}^c$  为系统噪声协方差矩阵。

滤波器的量测方程为:

$$\mathbf{Z}_k^c = \mathbf{H}_k^c \mathbf{X}_k^c + \mathbf{V}_k^c \quad (2)$$

其中,

$$\mathbf{Z}_k^c = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{kp} \\ \mathbf{Y}_{k\varphi} \end{bmatrix}, \mathbf{H}_k^c = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_p(\mathbf{X}_k) \\ \mathbf{B}_\varphi(\mathbf{X}_k) \end{bmatrix}, \mathbf{V}_k^c = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{kp} \\ \mathbf{V}_{k\varphi} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Y}_{kp}$  为移动站双差伪距观测量,  $\mathbf{Y}_{k\varphi}$  为移动站双差载波相位观测量,  $\mathbf{B}_p(\mathbf{X}_k)$  为伪距观测方程,  $\mathbf{B}_\varphi(\mathbf{X}_k)$  为载波相位观测方程,  $\mathbf{V}_{kp}$  为伪距观测噪声,  $\mathbf{V}_{k\varphi}$  为载波相位观测噪声。式(2)为非线性方程,线性化过程可参考文献[6]。

设定适当的滤波初值,通过卡尔曼滤波求出每个历元整周模糊度浮点解及其协方差矩阵,经过 LAMBDA 算法固定整周模糊度,同时也可以

求出移动站位置。

### 2.2 主卡尔曼滤波器

主卡尔曼滤波器采用双差紧组合的方式完成状态变量的估计,状态变量  $\mathbf{X}_k^z = [\boldsymbol{\varphi}^n \ \delta \mathbf{v}^n \ \delta \mathbf{r}^n \ \mathbf{b}_g^b \ \mathbf{b}_a^b]^T$ ,  $\boldsymbol{\varphi}^n$  为姿态角误差矢量,  $\delta \mathbf{v}^n$  为速度误差矢量,  $\delta \mathbf{r}^n$  为位置误差矢量,  $\mathbf{b}_g^b$  为陀螺仪常值零偏矢量,  $\mathbf{b}_a^b$  为加速度计常值零偏矢量。在当地水平坐标系下,系统状态方程为:

$$\mathbf{X}_k^z = \Phi_{k,k-1}^z \mathbf{X}_{k-1}^z + \Gamma_{k-1}^z \mathbf{W}_{k-1}^z \quad (3)$$

式(3)中各矩阵参数的设计参考文献[7]。

利用次卡尔曼滤波器求出整周模糊度后,将其代入双差载波相位观测方程,形成主卡尔曼滤波器的量测方程:

$$\mathbf{Z}_k^z = \mathbf{H}_k^z \mathbf{X}_k^z + \mathbf{V}_k^z \quad (4)$$

式中,

$$\mathbf{Z}_k^z = \begin{bmatrix} \nabla\Delta\varphi_k^{21} + \nabla\Delta N_k^{21} - \frac{\nabla\Delta\varphi_k^{21^0}}{\lambda} \\ \nabla\Delta\varphi_k^{31} + \nabla\Delta N_k^{31} - \frac{\nabla\Delta\varphi_k^{31^0}}{\lambda} \\ \vdots \\ \nabla\Delta\varphi_k^{n1} + \nabla\Delta N_k^{n1} - \frac{\nabla\Delta\varphi_k^{n1^0}}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_k^z = [\mathbf{0}_{(n-1) \times 6} \quad \mathbf{M}_{(n-1) \times 3} \quad \mathbf{0}_{(n-1) \times 6}]$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{l^2 - l^1}{\lambda} & \frac{m^2 - m^1}{\lambda} & \frac{n^2 - n^1}{\lambda} \\ \frac{l^3 - l^1}{\lambda} & \frac{m^3 - m^1}{\lambda} & \frac{n^3 - n^1}{\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{l^n - l^1}{\lambda} & \frac{m^n - m^1}{\lambda} & \frac{n^n - n^1}{\lambda} \end{bmatrix} \mathbf{D}_{rr}$$

式中,  $\nabla\Delta\varphi_k^{n1}$  为双差载波相位观测量,由基准站和移动站的相位观测值求双差获得;  $\nabla\Delta N_k^{n1}$  为双差整周模糊度,由次卡尔曼滤波器得出;  $\nabla\Delta\varphi_k^{n1^0}$  为几何双差伪距,由卫星星历与惯导解算的位置求出的几何伪距和基准站伪距求双差得到;  $(l, m,$

$n$ ) 为移动站到卫星的方向余弦;  $\mathbf{D}_r$  为 ECEF 坐标系转换为当地水平坐标系的误差转换矩阵, 因为状态方程的状态变量为当地水平坐标系下的, 而双差载波相位观测方程的误差是在 ECEF 坐标系下的, 因此需要乘以一个转换矩阵  $\mathbf{D}_r$ , 其具体计算公式可参考文献[7];  $\mathbf{V}_k^z$  为量测误差。

经过卡尔曼滤波的计算, 估计出移动站的姿态、速度、位置误差以及陀螺仪加速度计的偏差, 并进行闭环改正。

### 3 RTS 平滑

RTS (Rauch-Tung-Striebel) 平滑是 Rauch 等<sup>[8,9]</sup>于 1965 年提出的, 基于极大似然估计理论和概率密度函数, 利用所有的观测信息, 在获得各点状态和均方误差估计量的基础上, 可获得状态的最小方差估计。

对于式(3)和(4)组成的系统, 令  $k = 1, 2, \dots, m$ , 执行下列卡尔曼滤波循环, 其中  $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  分别为系统噪声和量测噪声误差协方差矩阵:

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{fk}^- = \Phi_{k,k-1}^z \mathbf{P}_{f,k-1}^+ \Phi_{k,k-1}^{zT} + \mathbf{Q}_{k-1}^z \\ \mathbf{K}_{fk}^z = \mathbf{P}_{fk}^- \mathbf{H}_k^{zT} (\mathbf{H}_k^z \mathbf{P}_{fk}^- \mathbf{H}_k^{zT} + \mathbf{R}_k^z)^{-1} \\ \hat{\mathbf{X}}_{fk}^- = \Phi_{k,k-1}^z \hat{\mathbf{X}}_{f,k-1}^+ \\ \hat{\mathbf{X}}_{fk}^+ = \hat{\mathbf{X}}_{fk}^- + \mathbf{K}_{fk}^z (\mathbf{Z}_k^z - \mathbf{H}_k^z \hat{\mathbf{X}}_{fk}^-) \\ \mathbf{P}_{fk}^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{fk}^z \mathbf{H}_k^z) \mathbf{P}_{fk}^- \end{cases} \quad (5)$$

求得  $\mathbf{X}_m^z$  的前向估计值  $\hat{\mathbf{X}}_{fm}^+$  及其协方差矩阵  $\mathbf{P}_{fm}^+$ 。在前向卡尔曼滤波过程中存储实时误差估计值  $\hat{\mathbf{X}}_{fk}^+$ 、误差预测值  $\hat{\mathbf{X}}_{fk}^-$ 、误差估计协方差阵  $\mathbf{P}_{fk}^+$  和预测误差估计协方差阵  $\mathbf{P}_{fk}^-$ , 以及系统的状态转移系数矩阵  $\Phi_{k,k-1}^z$ 。卡尔曼滤波完成后, 利用存储的数据进行如下反向平滑处理。

将卡尔曼滤波结果作为反向平滑的初始值, 即  $\hat{\mathbf{X}}_N^- = \hat{\mathbf{X}}_{fN}^+$ ,  $\mathbf{P}_N^- = \mathbf{P}_{fN}^+$ , 对于  $k = N-1, \dots, 1, 0$ , 执行下列 RTS 算法:

$$\begin{cases} \mathbf{I}_{f,k+1}^- = (\mathbf{P}_{f,k+1}^-)^{-1} \\ \mathbf{K}_k^z = \mathbf{P}_{fk}^+ \Phi_{k,k-1}^{zT} \mathbf{I}_{f,k+1}^- \\ \mathbf{P}_k^z = \mathbf{P}_{fk}^+ - \mathbf{K}_k^z (\mathbf{P}_{f,k+1}^- - \mathbf{P}_{k+1}^z) \mathbf{K}_k^{zT} \\ \hat{\mathbf{X}}_k^- = \hat{\mathbf{X}}_{fk}^+ + \mathbf{K}_k^z (\hat{\mathbf{X}}_{k+1}^- - \hat{\mathbf{X}}_{f,k+1}^+) \end{cases} \quad (6)$$

由公式(6)可知, RTS 平滑是由  $k = N-1$  到  $k = 0$  的递推过程,  $\mathbf{K}_k^z$  为平滑增益,  $\mathbf{P}_k^z$  为平滑误差估计协方差阵,  $\hat{\mathbf{X}}_k^-$  是平滑滤波的状态变量<sup>[10]</sup>。通过 RTS 平滑处理, 可以获得平滑区间内所有时刻的最佳估计值。

### 4 算例分析

利用一组实测的跑车数据, 对本文所述算法

的精度进行分析。IMU 采样频率为 200 Hz, 陀螺仪常值漂移为  $0.75^\circ/\text{h}$ , 加速度计的零偏为 1 mg, GPS 数据采样周期为 1 s。整个运动过程中, 基准站和流动站的共视卫星数大部分时间在 5 颗以上, 个别时刻少于 4 颗甚至只有 2 颗, 给模糊度固定带来一定的困难, 直接影响导航解算的精度。以 Inertial Explore 8.4 软件的解算结果作为参考值, 利用文章所述算法解算出来的位置、速度以及姿态误差如图 2~4 所示, 其中在历元 600~630 s 之间由于卫星数少且变化剧烈, 导致这段时间模糊度固定不了, 定位误差增加, 误差统计结果如表

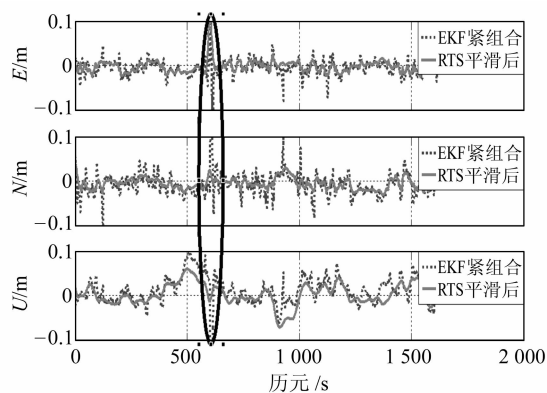


图 2 位置误差  
Fig. 2 Position errors

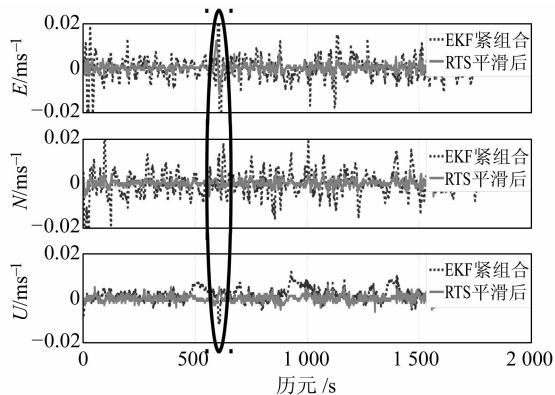


图 3 速度误差  
Fig. 3 Speed errors

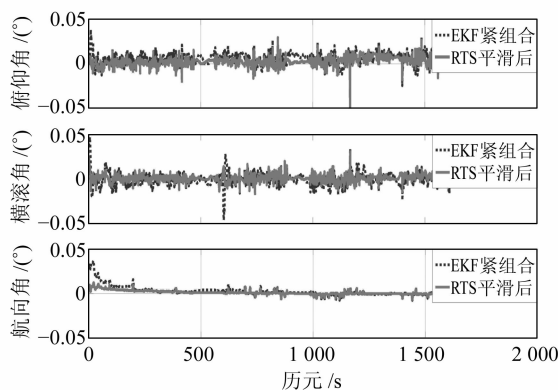


图 4 姿态误差  
Fig. 4 Attitude errors

1 所示,剔除本段历元后的误差统计结果如表 2 所示,其中姿态的统计结果取收敛后的结果(200 s 以后)。

由图 2~4 的误差曲线以及表 2 的误差统计结果可以看出,在大部分时间段,共视卫星数较多,通过正确解算整周模糊度并经 RTS 平滑处理后,可达 2 cm 的定位精度、2 mm/s 的测速精度;俯仰角和横滚角误差的 RMS 值为 0.006°,航向角由于可观测性较差,RMS 值为 0.021°。因此,整个系统的定位测速和定姿精度达到了较高的水平。RTS 平滑通过对前向卡尔曼滤波误差状态的处理,可以消除部分随机误差的影响,提高定位精度,就本算例而言,RMS 精度最大可提高约 66%。在卫星失锁或模糊度未固定的情况下,定位误差较大,RTS 平滑作为一种桥接算法,也能

大大提高定位精度。由表 1 的统计数据可知,经平滑处理后精度有 44%~92%的提高,充分证明了该算法在数据后处理中的重要作用。

表 1 模糊度未固定区间误差统计(30 s)

		RMS		精度提高 百分比/%
		EKF 紧组合	RTS 平滑后	
位置误差/m	E	0.283	0.075	73.5
	N	0.077	0.015	80.5
	U	0.127	0.010	92.1
速度误差/m·s <sup>-1</sup>	E	0.046	0.008	82.6
	N	0.007	0.002	71.4
	U	0.006	0.002	66.7
姿态误差/(°)	E	0.009	0.005	44.5
	N	0.021	0.007	66.7
	U	0.030	0.006	80.0

表 2 误差统计  
Tab. 2 Error statistics

		最大值		标准差		RMS		RMS 精度提高 百分比/%
		EKF 紧组合	RTS 平滑后	EKF 紧组合	RTS 平滑后	EKF 紧组合	RTS 平滑后	
位置误差/m	E	0.050	0.025	0.015	0.009	0.016	0.010	37.5
	N	0.113	0.037	0.022	0.013	0.023	0.014	39.1
	U	0.099	0.060	0.028	0.023	0.032	0.023	28.1
速度误差/m·s <sup>-1</sup>	E	0.019	0.007	0.004	0.002	0.005	0.002	60.0
	N	0.025	0.008	0.005	0.002	0.006	0.002	66.7
	U	0.012	0.007	0.003	0.001	0.004	0.002	50.0
姿态误差/(°)	俯仰角	0.042	0.037	0.006	0.005	0.008	0.006	25.0
	横滚角	0.034	0.031	0.006	0.004	0.006	0.004	33.3
	航向角	0.102	0.072	0.024	0.019	0.026	0.021	19.2

5 结 语

为满足高精度的定位定姿需求,本文提出一种基于差分载波相位/惯导紧组合与 RTS 平滑相结合的算法。通过两个卡尔曼滤波器来实现,其中次卡尔曼滤波器完成模糊度浮点解及其协方差阵的估计,然后由 LAMBDA 算法固定模糊度;主卡尔曼滤波器用来对导航状态误差和惯性器件误差参数进行估计,并利用闭环方式修正。最后通过 RTS 平滑滤波技术对数据作进一步处理。实测算例表明,该方法能够达到较高的位置速度和姿态精度,可用于高精度数据处理。

参考文献

[1] Agostino M D. Development of an Italian Low Cost GNSS/INS System Universally Suitable for Mobile Mapping[J]. IEEE, 2008,53-59

[2] 邱宏波,周东灵,李文耀,等. 基于闭环误差控制器的高精度 POS 后处理算法[J]. 中国惯性技术学报, 2010, 18(6): 691-695(Qiu Hongbo, Zhou Dongling, Li Wenyao, et al. High Precision POS Post-Processing Algorithm Based on Closed-Loop Error Controller[J]. Journal of Chinese Iner-

tial Technology, 2010, 18(6): 691-695)

[3] 房建成,杨胜,刘百奇. 高性能 POS 及其在移动测图系统中的应用[J]. 红外与激光工程, 2007, 36(增刊): 478-482 (Fang Jiancheng, Yang Sheng, Liu Baiqi. High-Performance POS and Its Application in MMS[J]. Infrared and Laser Engineering, 2007, 36(Supp): 478-482)

[4] Mönikes R, Teltschik A, Wendel J, et al. Post-Processing GNSS/INS Measurements Using a Tightly Coupled Fixed-Interval Smoother Performing Carrier Phase Ambiguity Resolution[J]. IEEE, 2006,283-290

[5] 孙红星. 差分 GPS/INS 组合定位定姿及其在 MMS 中的应用[D]. 武汉: 武汉大学, 2004 (Sun Hongxing. Position and Orientation Based on Differential GPS/INS Integration and Its Application on MMS[D]. Wuhan: Wuhan University, 2004)

[6] 刘基余. GPS 卫星导航定位原理与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003 (Liu Jiyu. Principles and Methods of GPS Satellite Navigation Position[M]. Beijing: Science Press, 2003)

[7] 苗岳旺. SINS/GPS 组合导航数据处理方法研究[D]. 郑州: 信息工程大学, 2013 (Miao Yuewang. Research on Data Processing Method of SINS/GPS Integrated Navigation[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2013)

[8] 李睿佳,李荣冰,刘建业,等. 卫星/惯性组合导航高精度融合算法研究[J]. 系统仿真学报, 2010, 22(1): 75-78(Li

- Ruijia, Li Rongbing, Liu Jianye, et al. Research on High Precision INS/GPS Integrated Navigation Off-Line Fusion Algorithm[J]. Journal of System Simulation, 2010, 22 (1): 75-78)
- [9] Nassar S. Improving the Inertial Navigation System (INS) Error Model for INS and INS/DGPS Applications [D]. Canada: University of Calgary, 2003
- [10] Liu H. Optimal Smoothing Techniques in Aided Inertial Navigation and Surveying Systems[D]. Canada: University of Calgary, 2009

## Fixed-Interval Smoothing Post-Processing Algorithms Based on Tightly Coupled Carrier Phase DGNSS/INS Method

HAO Wanliang<sup>1,2</sup> SUN Fuping<sup>1</sup> LIU Shuai<sup>1</sup>

1 College of Navigation and Aerospace Engineering, Information Engineering University, 62 Kexue Road, Zhengzhou 450052, China  
2 71687 Troops, Xinxiang 453000, China

**Abstract:** Aiming at the high precision requirements of position and orientation, a post-processing algorithm based on tightly coupled carrier phase DGNSS/INS and smoothing is proposed. Ambiguities in resolution, navigation status errors and IMU errors are estimated by two Kalman filters; RTS smoothing is used in data post-processing. Test results indicate that high precision positioning and orientation can be achieved, and that the algorithm is an effective data processing method.

**Key words:** position and orientation; DGNSS/INS; fixed-interval smoothing; two Kalman filters; post-processing

(上接第 1020 页)

- [11] 吴洪宝. 奇异谱和多通道奇异谱分析[J]. 气象教育与科技, 1997(4): 1-9 (Wu Hongbao. Singular and Multichannel Spectrum Analysis[J]. Meteorological Education and Science and Technology, 1997(4): 1-9)
- [12] 陈兆林, 张书毕, 佟瑞菊. 用拉格朗日多项式内插计算 GPS 卫星位置[J]. 全球定位系统, 2007, 32(2): 33-35 (Chen Zhaolin, Zhang Shubi, Tong Ruiju. Computing the Location of GPS Satellites by Lagrange Polynomial[J]. GNSS World of China, 2007, 32(2): 33-35)

## The Interpolation Application of Interval Quartering Algorithm of Singular Spectrum Analysis Iterative in GPS Coordinate Time Series

QIU Ronghai<sup>1,2</sup> CHENG Yingyan<sup>2</sup> WANG Hu<sup>2</sup> WANG Xiaoming<sup>3</sup> CAO Bingqiang<sup>2</sup>

1 College of Geomatics, Shandong University of Science and Technology, 579 Qianwangang Road, Qingdao 266590, China  
2 Chinese Academy of Surveying and Mapping, 28 West-Lianhuachi Road, Beijing 100830, China  
3 Space Research Centre, School of Mathematical and Geospatial Sciences, RMIT University, GPO BOX 2476 Melbourne, Victoria 3001, Australia

**Abstract:** This paper mainly uses the interval quartering algorithm of singular spectrum analysis iterative to do interpolation about GPS coordinate time series. This method extracts main characteristic components from an incomplete time series of coordinates by an adaptive filter. Based on the improved singular spectrum analysis iterative interpolation, it is then compared with the Lagrange interpolation method. Our research shows that the interval quartering algorithm of singular spectrum analysis iterative not only has higher interpolation precision, but also solves the interpolation efficiency problem. The computational efficiency is greatly improved.

**Key words:** adaptive filter; time series; characteristic component; the interval quartering algorithm of singular spectrum analysis iterative; Lagrange interpolation method