

# 重力数据误差对大地水准面模型建立的影响

李姗姗<sup>1</sup> 曲政豪<sup>1</sup>

1 信息工程大学地理空间信息学院,郑州市科学大道 62 号,450001

**摘 要:** 基于 Stokes 理论建立的大地水准面模型,其精度受重力数据误差,即重力数据分辨率、精度以及积分范围的影响。针对这一问题,通过重力场谱特征分析,给出不同地形区域重力数据分辨率以及积分半径造成的大地水准面高频截断误差的量级大小,计算平均重力异常误差对大地水准面建模精度的影响。研究成果对不同地形区域 cm 级大地水准面模型的建立具有理论与指导意义。

**关键词:** 截断误差;大地水准面;平均重力异常;代表误差;积分半径

**中图分类号:** P223      **文献标识码:** A

建立高精度高分辨率的大地水准面模型需要有地面上的重力异常。因为测量总是在地面离散点上进行,不能满足理论上连续分布的数据要求,因此以重力异常计算大地水准面时,都是使用数值化的方法来实现。最为常见的是将积分的球面划分成若干个面积,以该面积内或其周围已知的重力异常推求出该面积的平均重力异常,再用求和的方法完成积分的数值计算。由上述或等价的其他数值方法确定大地水准面将产生来自两个方面的误差:一是模型误差,即解式本身的误差(如地形起伏影响、球近似的影响等),可通过提高解式的严密性来减弱<sup>[1-4]</sup>;二是源于重力数据的误差,体现在平均重力异常的分辨率(即面积大小)、积分半径的选取及其精度两个方面。本文拟针对 1'×1' cm 级大地水准面模型的建立,研究分析不同地形区域对积分半径选取以及平均重力异常精度的要求。

## 1 重力数据的分辨率与精度

利用 Stokes-Pizzetti 公式计算大地水准面可表示为<sup>[5-6]</sup>:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (1)$$

式中, $R$  为地球平均半径, $\gamma$  为平均正常重力, $\psi$  为计算点与单位球面积分面元之间的球心角, $\overline{\Delta g_i}$  表示每个格网面积内的平均重力异常, $S(\psi)$  为 Stokes 函数:

$$S(\psi) = \csc \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left( \sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad (2)$$

在实际应用中,显然不可能采用全球积分。对于局域大地水准面模型的建立,一般采用求和的方法完成积分的数值计算,即将(1)式表示成如下的形式:

$$N = \frac{R}{4\pi\gamma} \sum_i \sum_j \overline{\Delta g_{ij}} S(\psi_{ij}) \Delta \sigma_{ij} \quad (3)$$

从式(3)可以看出,大地水准面模型建立的精度主要受两部分影响:一方面,平均重力异常的格网面积越小,即数值积分的单元面积划分越细,积分范围越大,则数值积分的结果就越精确;另一方面,水准面的精度还受到网格平均重力异常误差的影响,这一误差主要因为观测值稀疏与数据处理不完善造成。可将大地水准面建模误差分为由平均重力异常分辨率以及积分半径引起的截断误差部分  $m_1$  和平均重力异常误差所引起的误差部分  $m_2$ ,即

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 \quad (4)$$

## 2 截断误差计算

取计算点周围(球冠半径为  $\psi_0$ ) 1'×1' 分辨率的重力异常数据,结合 EGM2008 模型,采用移去-恢复技术计算大地水准面,位系数误差的影响可通过具体的模型误差来分析,这里暂且将它忽

略。则截断误差主要包含两部分：

第一部分,是仅采用  $1' \times 1'$  重力数据计算大地水准面所造成的影响,即在整个球面上忽略了频段  $n=10\ 801 \sim \infty$  的重力数据而导致的高频截断误差:

$$\Delta N_1 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \sum_{n=10\ 801}^\infty \Delta g_n \right] S(\psi) \sin\psi d\psi d\alpha \quad (5)$$

其中,误差估计为:

$$M\{\Delta N_1^2\} = \sum_{n=10\ 801}^\infty \frac{R^2}{\gamma^2 (n-1)^2} C_n \quad (6)$$

第二部分,由于积分半径(球冠半径  $\psi_0$ ) 以外区域采用的是 2 160 阶的 EGM2008 模型,相当于  $5' \times 5'$  的重力数据,也就是说,在该积分区域外还存在  $n=2\ 161 \sim 10\ 800$  的截断误差:

$$\Delta N_2 = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_{\psi_0}^\pi \left[ \sum_{n=2\ 161}^{10\ 800} \Delta g_n \right] S(\psi) \sin\psi d\psi d\alpha \quad (7)$$

其中,误差估计为:

$$M\{\Delta N_2^2\} = \sum_{n=2\ 161}^{10\ 800} Q_n^2 C_n \quad (8)$$

式中,  $Q_n$  为截断系数,可表示为<sup>[7]</sup>:

$$Q_n = \frac{R}{2\gamma} \int_{\psi_0}^\pi S(\psi) P_n(\cos\psi) \sin\psi d\psi \quad (9)$$

研究推导  $Q_n$  的文献很多。忽略其推导步骤,其计算式如下<sup>[7]</sup>:

$$\begin{aligned} Q_n(\psi_0) = & \frac{1}{(n-1)(n+2)} \\ & \{ nS(\psi_0) [P_{n-1}(\cos\psi_0) - \cos\psi_0 P_n(\cos\psi_0)] - \\ & (1 - \cos^2\psi_0) P_n(\cos\psi_0) \frac{dS(\psi)}{d\psi} \Big|_{\psi=\psi_0} + \\ & 2K_n(\psi_0) + 2I_n(\psi_0) + 9J_n(\psi_0) \} \end{aligned} \quad (10)$$

式中,

$$\begin{aligned} I_n(\psi_0) &= \frac{1}{2n+1} [P_{n+1}(\cos\psi_0) - P_{n-1}(\cos\psi_0)] \\ J_n(\psi_0) &= \\ & \frac{1}{2n+1} [(n+1)I_{n+1}(\psi_0) + nI_{n-1}(\psi_0)] \\ J_0(\psi_0) &= I_1(\psi_0) \\ K_{n+1}(\psi_0) - 2K_n(\psi_0) + K_{n-1}(\psi_0) &= \\ & \frac{I_n(\psi_0)}{\sqrt{2(1-\cos\psi_0)}} \\ K_0(\psi_0) &= -\frac{1}{2} (1 - \sqrt{\frac{2}{1-\cos\psi_0}}) \\ K_1(\psi_0) &= K_0(\psi_0) - (1 - \sqrt{\frac{1-\cos\psi_0}{2}}) \end{aligned}$$

利用 Rapp-Tscherning 模型估计得重力异常阶方差为<sup>[8]</sup>:

$$C_n = S^{n+2} \cdot \frac{A(n-1)}{(n-2)(n+B)} \quad (11)$$

式中,  $A=425.28, S=0.999\ 623, B=24, C_2=7.5$  (mGal)<sup>2</sup>。

根据式(6)和式(11),计算得到  $1' \times 1'$  重力数据分辨率造成的高频截断误差为 0.63 cm。然后取不同的积分半径,依据式(8)~(11)计算积分半径外的截断误差,计算结果如表 1 所示。

表 1 不同积分半径造成的截断误差

Tab. 1 Truncation error caused by different integral radius

积分半径 /( $^{\circ}$ )	截断误差 /cm	积分半径 /( $^{\circ}$ )	截断误差 /cm
20	5.46	80	1.89
30	3.98	90	1.74
40	3.18	100	1.61
50	2.68	110	1.50
60	2.34	120	1.42

3 不同地形区域重力场的谱特征

当利用式(6)、式(8)来估计分辨率以及远区高频截断部分造成的误差并以此确定平均重力异常积分半径时,是根据重力异常阶方差  $C_n$  估算的。而由式(11)给出的阶方差模型(以及其他一些已知模型)是国外学者通过全球重力异常的统计分析得出的经验公式,因此代表了全球重力异常的一般特征,但各个不同地区重力场的具体情况是有差异的。数据分辨率误差的本质是平均重力异常与其代表面积内各点重力异常的差异,即代表误差。对于局部地区,通常采用下面的代表误差模型<sup>[8]</sup>:

$$E^2 = 4C^2 D \quad (12)$$

其中,  $D$  是平均重力异常矩形网格的边长,以 km 为单位;  $C$  称为代表误差系数,它与各地区的地形情况(反映了重力场的复杂度)有关。

由于

$$\begin{aligned} E^2 &= M\{(\Delta g - \overline{\Delta g})^2\}_K = \\ & \sum_{n=2}^\infty (1 - \beta_n)^2 C_n^k \cong \sum_{n=N+1}^\infty C_n^k \end{aligned} \quad (13)$$

式中,角标  $K$  代表不同的地形类别。由代表误差的经验公式可见,不同地形类别的代表误差仅相差一个常数因子,故可取:

$$C_n^k = A_K^2 C_n \quad (14)$$

即

$$E^2 = \sum_{n=N+1}^\infty A_K^2 C_n = 4C^2 D \quad (15)$$

从而,可由  $C$  求得相应的常数  $A_K$ :

$$A_K = \left\{ 4C^2 D / \left( \sum_{n=N+1}^\infty C_n \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

计算得到的不同地形区域的  $A_K$  列于表 2。通常在面积较大( $>1^\circ\times1^\circ$ )时不直接采用代表误差的估计,故当  $N\leq180$  时取  $C_n^k=C_n$ 。

表 2 不同地形区域  $A_K$  统计

Tab. 2 Statistics for $A_K$ in different terrain areas						
网格大小	$1^\circ\times1^\circ$	$30'\times30'$	$20'\times20'$	$5'\times5'$	$3'\times3'$	$A_K$ 中值
相应的 $N$	180	360	540	2 160	3 600	
$\sum_{n=N+1}^\infty C_n$	885.5	641.3	503.0	127.7	52.4	
特大山区 ( $C=5.00$ )	3.5	2.9	2.7	2.7	3.3	3.0
大山区 ( $C=3.50$ )	2.4	2.1	1.9	1.9	2.3	2.1
中山区 ( $C=2.30$ )	1.6	1.4	1.2	1.2	1.5	1.4
小山区 ( $C=1.40$ )	1.0	0.8	0.7	0.8	0.9	0.8
丘陵 ( $C=0.84$ )	0.6	0.5	0.4	0.5	0.5	0.5
平原 ( $C=0.50$ )	0.4	0.3	0.3	0.3	0.5	0.4

因而,考虑到不同的地形类别,式(6)与式(8)的高频截断误差分别变为:

$$M\{\Delta N_1^2\} = \sum_{n=10\ 801}^\infty \frac{R^2}{\gamma^2 (n-1)^2} A_k^2 C_n \quad (17)$$

$$M\{\Delta N_2^2\} = \sum_{n=2\ 161}^{10\ 800} Q_n^2 A_k^2 C_n \quad (18)$$

根据式(17)计算的不同地形区域重力数据  $1'\times1'$  分辨率造成的高频截断误差如表 3 所示。

表 3 不同地形区域重力数据  $1'\times1'$  分辨率造成的截断误差

Tab. 3 Truncation error in different terrain areas caused by $1'\times1'$ gravity resolution			
地形类别	截断误差 /cm	地形类别	截断误差 /cm
平原	0.25	中山区	0.88
丘陵	0.31	大山区	1.30
小山区	0.50	特大山区	1.88

从表 3 可以看出,  $1'\times1'$  数据分辨率造成的高频截断误差,即使在特大山区,也仅为 1.88 cm,因此  $1'\times1'$  重力数据分辨率能满足 cm 级大地水准面建模的精度要求。根据式(18)计算的不同地形区域不同积分半径造成的截断误差示于表 4。

从表 4 可以看出,当积分半径取至  $20'$  时,在平原、丘陵和小山区均能满足 cm 级大地水准面建模的要求;但对于中山区与大山区而言,则积分半径至少需要取至  $30'$  和  $70'$ ;而对于特大山区,积分半径即使取至  $2^\circ$  也无法满足 cm 级建模的精度要求。继续扩大特大山区积分区域,结果示于表 5。当积分半径取至  $3^\circ$  时,在特大山区积分半径造成的截断误差为 9.65 cm。

表 4 不同积分半径在不同地形区域造成的截断误差  
Tab. 4 Truncation error in different terrain areas caused by different integral radius

截断半径 /( $^\circ$ )	截断误差/cm					
	平原	丘陵	小山区	中山区	大山区	特大山区
20	0.87	1.36	3.49	10.70	24.08	49.14
30	0.64	0.99	2.55	7.80	17.55	35.82
40	0.51	0.80	2.04	6.24	14.05	28.66
50	0.43	0.67	1.72	5.26	11.84	24.16
60	0.37	0.58	1.50	4.59	10.32	21.06
70	0.33	0.52	1.33	4.09	9.20	18.77
80	0.30	0.47	1.21	3.71	8.34	17.02
90	0.28	0.43	1.11	3.40	7.66	15.63
100	0.26	0.40	1.03	3.16	7.10	14.49
110	0.24	0.38	0.96	2.95	6.64	13.54
120	0.23	0.30	0.91	2.77	6.24	12.74

表 5 不同积分半径在特大山区造成的截断误差  
Tab. 5 Truncation error in huge mountain area caused by different integral radius

截断半径 /( $^\circ$ )	截断误差 /cm	截断半径 /( $^\circ$ )	截断误差 /cm
130	12.05	180	9.65
140	11.45	190	9.31
150	10.92	200	8.99
160	10.45	210	8.71
170	10.03	220	8.44

4 重力数据误差影响

仅考虑近区平均重力异常误差对大地水准面的影响,将式(3)表示为:

$$\delta N = S \delta_{\Delta g} \quad (19)$$

式中,  $S$  为线性化 Stokes 积分算子,  $\delta_{\Delta g}$  为重力异常值向量。设平均重力异常的方差为  $C_{\Delta\Delta g}$ , 根据误差传播定理,可得大地水准面的方差  $C_{\delta N}$  为:

$$C_{\delta N} = S C_{\Delta\Delta g} S^T \quad (20)$$

因此,平均重力异常中误差与大地水准面高中误差的关系为:

$$M_{\delta N} = \frac{R}{4\pi\gamma} \sqrt{\sum_i \sum_j S^2(\psi_{ij}) (\Delta\sigma_{ij})^2 M_{\Delta\Delta g}} \quad (21)$$

考虑到中央区  $S(\psi)$  的计算存在奇异问题,因此将式(20)表示为中央区  $\sigma_0$  与扣除中央区  $\sigma-\sigma_0$  的组合:

$$M_{\delta N}^2 = M_{\delta N}^2(\sigma_0) + M_{\delta N}^2(\sigma-\sigma_0) \quad (22)$$

式中,  $M_{\delta N}(\sigma-\sigma_0)$  计算如式(21)。而在中央区,由于<sup>[6]</sup>

$$S(\psi) \approx \frac{2}{\sin\psi} \approx \frac{2}{\psi} = \frac{2R}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (23)$$

代入到式(1),得到平面近似下中央区大地水准面的计算公式<sup>[1]</sup>:

$$\frac{1}{2\pi\gamma} \iint_{\sigma_0} \frac{\Delta g}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy = a_{0,0} \frac{1}{2\pi\gamma} \int_{-\frac{3}{2}^\circ}^{+\frac{3}{2}^\circ} dx \int_{-\frac{3}{2}^\circ}^{+\frac{3}{2}^\circ} dy \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy +$$

$$\begin{aligned} &a_{2,0} \frac{1}{2\pi\gamma(dx)^2} \int_{-\frac{3}{2}dx}^{+\frac{3}{2}dx} \int_{-\frac{3}{2}dy}^{+\frac{3}{2}dy} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy + \\ &a_{0,2} \frac{1}{2\pi\gamma(dy)^2} \int_{-\frac{3}{2}dx}^{+\frac{3}{2}dx} \int_{-\frac{3}{2}dy}^{+\frac{3}{2}dy} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy + \\ &a_{2,2} \frac{1}{2\pi\gamma(dx dy)^2} \int_{-\frac{3}{2}dx}^{+\frac{3}{2}dx} \int_{-\frac{3}{2}dy}^{+\frac{3}{2}dy} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \end{aligned} \tag{24}$$

其中,

$$\Delta g(x,y) = \left(1, \frac{x}{dx}, \left(\frac{x}{dx}\right)^2\right) (a_{ij}) \left(1, \frac{y}{dy}, \left(\frac{y}{dy}\right)^2\right)^T = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} \left(\frac{x}{dx}\right)^i \left(\frac{y}{dy}\right)^j \tag{25}$$

通过式(25),依据误差传播定理,将 $\Delta g(x,y)$ 的误差传播给拟合系数 $a_{ij}$ ,再通过式(24)计算 $M_{\delta N}(\sigma_0)$ 。

选择不同积分半径计算 3 mGal、5 mGal、10 mGal 以及 20 mGal 平均重力异常误差对大地水准面计算精度的影响,计算点位置(33°,110°),计算结果如表 6 所示(分辨率1'×1',单位 cm)。

表 6 不同积分半径平均重力异常数据误差对确定大地水准面的影响

Tab. 6 Effect of error of mean gravity anomalies with different integral radius on geoid construction

重力误差值 /mGal	积分半径									
	20'	30'	40'	50'	60'	70'	80'	120'	180'	
3	0.39	0.42	0.50	0.45	0.46	0.47	0.48	0.50	0.52	
5	0.66	0.70	0.83	0.75	0.77	0.78	0.79	0.83	0.87	
10	1.31	1.39	1.67	1.49	1.53	1.56	1.59	1.67	1.75	
20	2.62	2.79	3.32	2.98	3.05	3.12	3.17	3.32	3.50	

从表 6 可以看出,随着积分半径的增大,平均重力异常误差对大地水准面建模精度的影响逐渐增大。综合表 3、表 4 与表 6,我们可以根据局域大地水准面建模精度的要求,选择合适的积分半径,并对 1'×1' 平均重力异常精度提出要求。例如假定某计算区域为一大山区,要求大地水准面精度为 10 cm,我们选定积分半径为 80',该区域 1'×1' 平均重力异常精度为 10 mGal,则大地水准面建模精度为 11.23 cm;如果该区域 1'×1' 平均重力异常精度为 3 mGal,则大地水准面建模精度为 10.12 cm。选定积分半径为 120',平均重力异常精度为 10 mGal,则大地水准面建模精度为 9.21 cm;如果该区域平均重力异常精度为 3 mGal,则大地水准面建模精度为 8.04 cm。显然,积分半径越大,平均重力异常精度越高,建模精度就越高。考虑到重力测量的工程量,在建立局域大地水准面模型之前,需要根据建模精度的需求选择合适的积分半径与平均重力异常精度,尽可能地满足建模精度需求,且测量任务又不至

于过于繁重。

5 结 语

本文研究分析了 1'×1' cm 级大地水准面建模精度对不同地形区域积分半径选取以及平均重力异常精度的要求。实验表明,当积分半径取至 20' 时,在平原、丘陵和小山区均能满足 cm 级大地水准面的建模要求;对于中山区与大山地区而言,则积分半径至少需要取至 30' 和 70';而对于特大山区,当积分半径取至 3° 时,其造成的截断误差为 9.65 cm。同时,给出了 3 mGal、5 mGal、10 mGal 以及 20 mGal 平均重力异常误差对大地水准面建模精度影响的量级大小。综合计算结果,我们可以选择合适的积分半径以及平均重力异常精度,使之既满足建模精度需求,又避免冗余繁重的工程测量任务。本文的研究成果对于计算确定局域 cm 级大地水准面模型具有参考价值与指导意义。

参考文献

[1] 李姗姗,吴晓平,张传定,等.顾及地形与完全球面布格异常梯度项改正的区域似大地水准面精化[J].测绘学报,2012,41(4):510-516(Li Shanshan, Wu Xiaoping, Zhang Chuanding, et al. Regional Quasi-Geoid Refining Considering Corrections of Terrain and Complete Spherical Bouguer Anomaly's Gradient Term[J]. Acta Geodaetica et Cartographia Sinica, 2012, 41(4):510-516)

[2] 陈俊勇,李建成,宁津生,等.我国大陆高精度、高分辨率大地水准面的研究和实施[J].测绘学报,2001,30(2):95-99(Chen Junyong, Li Jiancheng, Ning Jinsheng, et al. On a High Resolution and High Accuracy Geoid in China Mainland[J]. Acta Geodaetica et Cartographia Sinica, 2001, 30(2): 95-99)

[3] 陈俊勇,李建成,宁津生,等.中国新一代高精度、高分辨率大地水准面的研究和实施[J].武汉大学学报:信息科学版,2001,26(4):283-289(Chen Junyong, Li Jiancheng, Ning Jinsheng, et al. A New Chinese Geoid with High Resolution and High Accuracy[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2001, 26(4): 283-289)

[4] 宁津生,罗志才,杨洁吉,等.深圳市 1 km 高分辨率 cm 级高精度大地水准面的确定[J].测绘学报,2003,32(2):102-107(Ning Jinsheng, Luo Zhicai, Yang Zhanji, et al. Determination of Shenzhen Geoid with 1 km Resolution and Centimeter Accuracy[J]. Acta Geodaetica et Cartographia Sinica, 2003, 32(2): 102-107)

[5] Moritz H. Physical Geodesy [M]. New York:Springer-Verlag Wien, 2005

[6] 郭俊义.物理大地测量学基础[M].武汉:武汉测绘科技大学出版社,1994(Guo Junyi. Foundation of Physical Geodesy[M]. Wuhan: Wuhan Technology University of Surveying and Mapping Press, 1994)