

# 声速误差对圆走航水下控制点定位影响分析

孙文舟<sup>1</sup> 殷晓冬<sup>2</sup> 夏文杰<sup>1</sup>

1 国家海洋技术中心漳州基地筹建办公室,厦门市西林东路 149 号,361000  
2 海军大连舰艇学院军事海洋与测绘系,大连市解放路 667 号,116018

**摘 要:** 针对圆走航定位声速剖面测量不准确引起水下控制点坐标解算存在偏差的问题,首先介绍了声速不确定性对测距误差的影响,并将声速测距误差分成背景声速剖面误差、随机误差、测距误差长周期项和测距误差短周期项,再通过分析坐标改正数方程得到不同声速测距误差项对控制点坐标定位的影响。最后,设计 2 组仿真实验对该理论进行验证,实验结果与理论推导的结论一致。

**关键词:** 海底控制点;测距误差;ST 定理;最小二乘法;声速剖面

**中图分类号:** P229      **文献标识码:** A

圆走航定位是控制点单点定位最有效的方法,可有效改善水平方向的定位精度<sup>[1]</sup>,但垂直方向的定位精度较差<sup>[2]</sup>。影响其定位精度最主要的因素是声速不确定性造成的测距误差<sup>[3-5]</sup>,但声速变化的规律复杂,使控制点的定位结果分析成为难点。

声速的不确定性是由声速剖面测量的不准确性、声速在时间和空间上的随机变化引起的<sup>[6]</sup>,可认为是由测距误差常数项、长周期项、短周期项及随机误差等 4 个部分组成<sup>[5,7]</sup>。Sun 等<sup>[8]</sup>研究发现,在背景声速剖面基础上,声速剖面面积的变化量与传播时间呈线性负相关,且测距误差常数项是由背景声速测量的不准确性引起的<sup>[5]</sup>。有学者通过实验研究了测距误差长周期项和短周期项的变化规律<sup>[9-10]</sup>,认为长周期项与温度日变化有关,短周期项规律复杂,可能是由海洋内波等随机现象造成的,难以参数化建模<sup>[1]</sup>。为消除声速测距误差的影响,Zhao 等<sup>[11]</sup>在控制点坐标的解算模型中将其作为常数,并利用最小二乘法与坐标改正数一起作为待估参数求解,未考虑声速误差长周期项和短周期项的影响;同时发现,对 2 个连续历元的观测方程作差,既可以消除误差常数项,还可以消除误差长周期项,但误差短周期项依然存在。

本文针对圆走航定位声速测距误差造成控制

点坐标解算不准确的问题,从控制点坐标改正数方程入手,分析不同声速测距误差对控制点三维坐标定位结果的影响,并设计相应的仿真实验对其进行验证。

## 1 声速测距误差对圆走航定位坐标解算的影响

圆走航定位是指测量船在以海底应答器为圆心、水深为半径的圆航线走航过程中不断开展声学测距,通过距离交汇原理确定海底应答器三维绝对坐标的方法。

针对圆走航定位确定单个海底控制点三维坐标的方法,分析声速相关性误差对坐标解算结果的影响,测距误差的数学表达式为<sup>[5,8]</sup>:

$$\delta\rho_v = -\frac{c_b}{S \times c_h} \times \rho \times \Delta S \tag{1}$$

式中, $c_b$  为海底声速值, $S$  为背景声速剖面面积,指背景声速剖面相对于深度轴围成的面积, $c_h$  为整个水层的 Harmonic 平均声速<sup>[12]</sup>, $\Delta S$  为瞬时声速剖面与背景声速剖面的面积差。由于采用圆走航定位,斜距值  $\rho$  可认为近似相等,因此测距误差仅与  $\Delta S$  有关。

认为圆走航的过程为等权观测,权矩阵  $\mathbf{P}$  为单位阵,展开坐标改正数公式分析声速测距误差对坐标解算结果的影响:

$$d\mathbf{x} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{L} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \delta\rho_v =$$

收稿日期:2020-03-11  
项目来源:国家自然科学基金(41876103,41874016)。  
第一作者简介:孙文舟,博士生,主要研究方向为海洋大地测量,E-mail:1519374228@qq.com。  
通讯作者:殷晓冬,博士,教授,主要研究方向为海洋大地测量,E-mail:triest@163.com。

$$\begin{bmatrix} \frac{\sin\gamma \cdot \cos\beta_1}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \cos\beta_i)^2} & \frac{\sin\gamma \cdot \cos\beta_2}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \cos\beta_i)^2} & \dots & \frac{\sin\gamma \cdot \cos\beta_n}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \cos\beta_i)^2} \\ \frac{\sin\gamma \cdot \sin\beta_1}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \sin\beta_i)} & \frac{\sin\gamma \cdot \sin\beta_2}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \sin\beta_i)} & \dots & \frac{\sin\gamma \cdot \sin\beta_n}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \sin\beta_i)} \\ \frac{\cos\gamma}{\sum_{i=1}^n (\cos\gamma)^2} & \frac{\cos\gamma}{\sum_{i=1}^n (\cos\gamma)^2} & \dots & \frac{\cos\gamma}{\sum_{i=1}^n (\cos\gamma)^2} \end{bmatrix} \cdot \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} \delta\rho_{v1} \\ \delta\rho_{v2} \\ \vdots \\ \delta\rho_{vn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sum_{i=1}^n (\cos\beta_i \cdot \delta\rho_{vi})}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \cos\beta_i)^2} & \frac{\sum_{i=1}^n (\sin\beta_i \cdot \delta\rho_{vi})}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \sin\beta_i)^2} & \frac{\cos\gamma \cdot \sum_{i=1}^n (\delta\rho_{vi})}{\sum_{i=1}^n (\cos\gamma)^2} \end{bmatrix}$$

根据测距误差表达式可知，圆走航定位中背景声速误差可认为是常数项，则：

$$\mathbf{dx} = \begin{bmatrix} \frac{\delta\rho_{cb} \cdot \sin\gamma \cdot \sum_{i=1}^n \cos\beta_i}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \cos\beta_i)^2} & \frac{\delta\rho_{cb} \cdot \sin\gamma \cdot \sum_{i=1}^n \sin\beta_i}{\sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \sin\beta_i)^2} & \frac{n \cdot \delta\rho_{cb} \cdot \cos\gamma}{\sum_{i=1}^n (\cos\gamma)^2} \end{bmatrix}^T \quad (3)$$

因为  $\sum_{i=1}^n (\cos\beta_i) = \sum_{i=1}^n (\sin\beta_i) = 0$ ，则水平方向的坐标改正数为 0。由此可得，背景声速剖面误差不会对控制点水平坐标产生影响，只对垂直坐标有影响。

受温度日变化及海洋内波的影响，声速剖面面积差不断变化，如果认为这种变化近似为正弦函数，则周期性测距误差  $\delta\rho_{vp}$  可表示为：

$$\delta\rho_{vp} = k_p \cdot \Delta S_0 \cdot \sin(\omega_v \cdot t + \varphi_v) \quad (4)$$

$$k_p = \frac{c_b \cdot \rho}{S \cdot c_h} \quad (5)$$

式中， $\omega_v$  为声速剖面面积差变化的角速率， $\varphi_v$  为初始相位角， $t$  为测量过程经过的时间， $\Delta S_0$  为声速剖面面积变化的振幅。将式(4)代入式(2)，坐标改正数的向量变为：

$$\mathbf{dx} = \begin{bmatrix} k_p \cdot \sin\gamma \cdot \Delta S_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\cos\beta_i \cdot \sin(\omega_v \cdot t + \varphi_v)) / \sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \cos\beta_i)^2 \\ k_p \cdot \sin\gamma \cdot \Delta S_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\sin\beta_i \cdot \sin(\omega_v \cdot t + \varphi_v)) / \sum_{i=1}^n (\sin\gamma \cdot \sin\beta_i)^2 \\ k_p \cdot \sin\gamma \cdot \Delta S_0 \cdot \sum_{i=1}^n (\cos\gamma \cdot \sin(\omega_v \cdot t + \varphi_v)) / \sum_{i=1}^n (\cos\gamma)^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中， $k_p$ 、 $\Delta S_0$  和  $\sin\gamma$  均为确定的常数。求和符号内的式子与声速剖面面积及测量船位置变化有关，因此研究周期性测距误差对坐标改正数的影响需要了解求和符号内式子的性质，若将离散的观测点看作连续的函数，则求和符号内的式子可写为：

$$f(t) = \int_0^{T_s} \sin\left(\frac{2\pi}{T_c} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_v} \cdot t + \varphi_v\right) dt \quad (7)$$

式中， $T_c$  为测量船走航一圈花费的时间， $T_s$  为测量过程花费的总时间，是  $T_c$  的整数倍。令

$$g(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_c} \cdot t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_v} \cdot t + \varphi_v\right) \quad (8)$$

根据积化和差公式，式(8)可写为：

$$2g(t) = \cos\left(2\pi \cdot t \cdot \left(\frac{1}{T_c} + \frac{1}{T_v}\right) + \varphi_v\right) - \cos\left(2\pi \cdot t \cdot \left(\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_c}\right) + \varphi_v\right) \quad (9)$$

因为初始相位角不影响积分的结果，将  $g(t)$  代入积分公式时可以去掉  $\varphi_v$ 。式(7)可改为：

$$2f(t) = \int_0^{T_s} \cos\left(\frac{2\pi}{\left(\frac{T_c \cdot T_v}{T_c + T_v}\right)} \cdot t\right) dt - \int_0^{T_s} \cos\left(\frac{2\pi}{\left(\frac{T_c \cdot T_v}{T_c - T_v}\right)} \cdot t\right) dt \quad (10)$$

令  $T_m = \frac{T_c \cdot T_v}{T_c + T_v}$ ， $T_n = \frac{T_c \cdot T_v}{T_c - T_v}$ 。若  $T_v$  为测距误

差周期项的周期,为使  $f(t)$  的积分为 0,  $T_s$  应为  $T_m$  和  $T_n$  的整数倍。设  $T_s = k_c \cdot T_c, T_c = k_v \cdot T_v, T_s$  与  $T_m$  和  $T_n$  的比值分别为  $\eta_m$  和  $\eta_n$ , 则:

$$\eta_m = \frac{T_s}{T_m} = \frac{k_c \cdot k_s \cdot T_v}{\frac{k_v}{k_v + 1} \cdot T_v} = k_c k_v + k_c \quad (11)$$

$$\eta_n = \frac{T_s}{T_s} = \frac{k_c \cdot k_v \cdot T_v}{\frac{k_v}{k_v - 1} \cdot T_v} = k_c k_v - k_c \quad (12)$$

由  $k_c$  的定义可知,其必为整数,因此  $\eta_m$  和  $\eta_n$  为整数的条件是  $k_c k_v$  为整数。当  $\eta_m$  和  $\eta_n$  同时为整数时,函数  $f(t)$  为 0,即水平坐标  $y$  不受周期性误差的影响。但当  $k_c = k_v = 1$  时,  $f(t)$  函数前一项积分为 0,后一项不为 0,此时水平坐标  $y$  的解算结果不为 0。

水平方向坐标  $x$  的推导过程与  $y$  方向相同,结论也相同。对于垂直方向,被积函数为:

$$g(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{T_v} \cdot t + \varphi_v\right) \quad (13)$$

通过相同的推导过程可知,要使垂直方向坐标  $z$  的改正数为 0,需要  $T_v$  和  $T_s$  满足:

$$T_s = \eta_s \cdot T_v \quad (14)$$

$$\eta_s = k_c \cdot k_v \quad (15)$$

式中,  $\eta_s$  必须为整数。

2 仿真实验分析

通过 2 个仿真实验来验证本文的结论。设计水深为 500 m,测量船以海底应答器为圆心进行圆走航,走航半径等于水深,航速为 3 m/s。测量船每 5 s 获得 1 个采样点,测距随机误差的精度为 5 cm,测量船水平定位精度为 5 cm,垂直定位精度为 10 cm。

在仿真实验 1 中,测距误差只包含 0.2 m 的误差常数项和随机误差。假设测量船分别走航 1 圈和 2 圈,控制点坐标的解算结果见表 1 (单位 m)。

表 1 控制点坐标解算结果

Tab. 1 Coordinates solution of control points

	dx	dy	dz
走航 1 圈	-0.010 1	-0.000 4	-0.285 6
走航 2 圈	0.001	-0.002 1	-0.287 2

表 1 与理论推导的结果一致,因此测距误差常数项不会对水平方向的计算结果产生影响,只影响垂直方向的结果,且增加观测量对坐标解算结果的改善不明显。

在仿真实验 2 中,测距误差包含周期项和随机项,周期项用正弦函数表示,振幅为 0.2 m,初

始相位为  $\pi/6$ ,周期分别为走航一圈花费时间的 1 倍、1.2 倍及 1.5 倍。同样假设测量船分别走航 1 圈和 2 圈,控制点坐标的解算结果见表 2 (单位 m)。

表 2 控制点坐标解算结果

Tab. 2 Coordinates solution of control points

$k_c$	$k_v$	dx	dy	dz
走航 1 圈	1.0	-0.145 0	-0.241 0	0.000 1
	1.2	-0.265 8	-0.100 4	-0.045 0
	1.5	-0.194 1	0.069 8	-0.054 0
	2.0	0.000 1	0.007	0.004 6
走航 2 圈	1.0	-0.140 4	-0.241 2	-0.000 6
	1.2	-0.231 9	0.037 9	-0.037 2
	1.5	-0.003 5	0	0.000 6
	2.0	0	0.000 8	-0.002 9

由表 2 可知,当  $k_c = k_v = 1$  时,测距误差周期项对水平方向坐标有影响,但垂直方向满足式 (14)、(15),不会产生影响;当  $k_c = 1, k_v = 1.5$  时,  $\eta_m, \eta_n$  和  $\eta_s$  分别为 2.5、0.5 和 1.5,测距误差周期项对水平方向和垂直方向坐标均有影响;而当  $k_c = 2$  时,  $\eta_m, \eta_n$  和  $\eta_s$  分别为 5、1 和 3,测距误差周期项不会影响水平方向和垂直方向坐标;  $k_v = 1.2$  时,无论  $k_c = 1$  或 2,  $\eta_m, \eta_n$  和  $\eta_s$  均不为整数,测距误差周期项对水平方向和垂直方向坐标均有影响;当  $k_v = 2$  时,无论  $k_c = 1$  或 2,  $\eta_m, \eta_n$  和  $\eta_s$  均为整数,测距误差周期项不会对水平方向和垂直方向坐标产生影响。该结果充分验证了理论推导的正确性。

基于以上的研究分析可以发现,海水的状态信息,尤其是声速剖面在观测时间段内的变化信息,对圆走航定位方法精确确定海底控制点坐标至关重要。因此,在声速剖面测量上建议采用连续观测的方式,尽可能捕获声速信息在时间上的变化。

3 结 语

本文研究了声速相关性测距误差对圆走航确定水下控制点三维坐标的影响,通过理论推导和仿真实验分析得出以下结论:

1)圆走航单点定位中测距误差常数项不会对水平方向的解算结果产生影响,但会影响垂直方向坐标;

2)当满足式(11)、(12)和式(14)、(15)时,测距误差周期项不会对定位计算结果的水平方向和垂直方向坐标产生影响,但当  $k_c = k_v = 1$  时,测距误差周期项会对水平方向坐标产生影响。

参考文献

[1] 孙文舟,殷晓冬,景景阳,等. 海底控制点定位的半参数平差模型法[J]. 测绘学报, 2019, 48(1): 117-123 (Sun Wenzhou, Yin Xiaodong, Bao Jingyang, et al. Semi-Parametric Adjustment Model Methods for Positioning of Seafloor Control Point[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2019, 48(1): 117-123)

[2] 赵建虎,陈鑫华,吴永亨,等. 顾及波浪影响和深度约束的水下控制网绝对坐标的精确确定[J]. 测绘学报, 2018, 47(3): 413-421 (Zhao Jianhu, Chen Xinhua, Wu Yongting, et al. Determination of Absolute Coordinate of Underwater Control Point Taking Waves and Depth's Constraint into Account[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2018, 47(3): 413-421)

[3] 赵建虎,梁文彪. 海底控制网测量和解算中的几个关键问题[J]. 测绘学报, 2019, 48(9): 1 197-1 202 (Zhao Jianhu, Liang Wenbiao. Some Key Points of Submarine Control Network Measurement and Calculation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2019, 48(9): 1 197-1 202)

[4] 杨元喜,徐天河,薛树强. 我国海洋大地测量基准与海洋导航技术研究进展与展望[J]. 测绘学报, 2017, 46(1): 1-8 (Yang Yuanxi, Xu Tianhe, Xue Shuqiang. Progresses and Prospects in Developing Marine Geodetic Datum and Marine Navigation of China[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2017, 46(1): 1-8)

[5] 孙文舟,殷晓冬,曾安敏,等. 附加深度差和水平距离约束的深海控制点差分定位算法[J]. 测绘学报, 2019, 48(9): 1 190-1 196 (Sun Wenzhou, Yin Xiaodong, Zeng Anmin, et al. Differential Positioning Algorithm for Deep-Sea Control Points on Constraint of Depth Difference and Horizontal Distance Constraint[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2019, 48(9): 1 190-1 196)

[6] Yamada T, Ando M, Tadokoro K, et al. Error Evaluation in Acoustic Positioning of a Single Transponder for Seafloor Crustal Deformation Measurements[J]. Earth, Planets and Space, 2002, 54(9): 871-881

[7] Xu P L, Ando M, Tadokoro K. Precise, Three-Dimensional Seafloor Geodetic Deformation Measurements Using Difference Techniques [J]. Earth, Planets and Space, 2005, 57(9): 795-808

[8] Sun W Z, Yin X D, Zeng A M. The Relationship between Propagation Time and Sound Velocity Profile for Positioning Seafloor Reference Points[J]. Marine Geodesy, 2019, 42(2): 186-200

[9] Spiess F N, Chadwell C D, Hildebrand J A, et al. Precise GPS/Acoustic Positioning of Seafloor Reference Points for Tectonic Studies[J]. Physics of the Earth and Planetary Interiors, 1998, 108(2): 101-112

[10] Osada Y, Fujimoto H, Miura S, et al. Estimation and Correction for the Effect of Sound Velocity Variation on GPS/Acoustic Seafloor Positioning: An Experiment Off Hawaii Island[J]. Earth, Planets and Space, 2003, 55(10): 17-20

[11] Zhao J H, Zou Y J, Zhang H M, et al. A New Method for Absolute Datum Transfer in Seafloor Control Network Measurement[J]. Journal of Marine Science and Technology, 2016, 21(2): 216-226

[12] 赵建虎. 现代海洋测绘[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2007 (Zhao Jianhu. Modern Marine Surveying and Charting [M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2007)

Analysis of the Influence of Sound Velocity Error on Sailing-Circle Positioning Method for Seafloor Control Points

SUN Wenzhou<sup>1</sup> YIN Xiaodong<sup>2</sup> XIA Wenjie<sup>1</sup>

1 Office for Establishing Zhangzhou Base, National Ocean Technology Center, 149 East-Xilin Road, Xiamen 361000, China  
2 Department of Military Oceanography and Hydrography and Cartography, Dalian Naval Academy, 667 Jiefang Road, Dalian 116018, China

**Abstract:** This paper focuses on the problem of deviation of seafloor control point coordinate solution caused by inaccurate measurement of sound velocity profile when using the sailing-circle positioning method. First, the effect of uncertainty in sound velocity on the ranging error are introduced. Then, the ranging error is divided into four parts: background sound velocity error, ranging random error, long-period term and short-period term of ranging error. The influence of these four parts on the control point coordinates are shown through analyzing the coordinate correction equation. The theoretical results are consistent with the simulation experiments.

**Key words:** seafloor control point; ranging error; ST law; least square method; sound velocity profile

**Foundation support:** National Natural Science Foundation of China, No. 41876103, 41874016.  
**About the first author:** SUN Wenzhou, PhD candidate, majors in marine geodesy, E-mail: 1519374228@qq.com.  
**Corresponding author:** YIN Xiaodong, PhD, professor, majors in marine geodesy, E-mail: triest@163.com.