

基于偏差改正的病态模型 Liu 估计的单位权方差无偏估计

丁斌芬¹ 安洁玉¹

1 江西应用科技学院软件与区块链学院, 南昌市联福大道 1 号, 330100

摘要: 对 Liu 估计残差偏差进行修正, 并基于二次型的数学期望公式, 利用偏差改正后的残差导出 Liu 估计解的近似无偏单位权方差估计式。2 个算例分析结果表明, 相比于传统基于有偏残差的单位权方差计算公式, 本文公式计算的单位权方差与真值更为接近。

关键词: 病态模型; Liu 估计; 偏差改正; 单位权方差

中图分类号: P207

文献标识码: A

当观测模型的系数阵呈良态时, 最小二乘法能获得最优无偏的参数估值。然而, 当模型的系数阵呈病态时, 微小的观测误差会导致解的巨大波动, 使常规最小二乘估计的解不可靠^[1]。为此, 学者们提出多种估计方法, 如 Tikhonov 正则化、岭估计、截断奇异值分解(truncated singular value decomposition, TSVD)和 Liu 估计等^[2-9]。目前关于病态模型的有偏性研究大都集中于 Tikhonov 正则化或 TSVD 正则化^[10-12], 鲜有涉及 Liu 估计的相关研究。不同于 Tikhonov 正则化, Liu 估计除含有正则化参数外, 还额外引入了一个修正因子, 因此可更加灵活地处理病态问题^[7-9]。但由于引入了正则化参数和修正因子, Liu 估计是有偏的。事实上, Liu 估计正是通过牺牲参数估值的无偏性来换取其有效性。

基于以上研究, 本文首先分析了由于引进正则化参数和修正因子而导致的 Liu 估计解及其残差的偏差; 然后将偏差从残差中扣除, 并利用偏差改正后的残差导出 Liu 估计的单位权方差估计公式; 最后用数值算例和病态测边网算例验证公式的有效性。

1 病态模型及其 Liu 估计解法

测量上常用的 Gauss-Markov 模型为:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{e} \quad (1)$$

式中, \mathbf{y} 为 m 维观测向量, \mathbf{A} 为 $m \times n$ 的系数矩阵, \mathbf{x} 为 n 维未知参数, \mathbf{e} 为误差向量且满足 $E(\mathbf{e})$

$= 0, D(\mathbf{e}) = \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}$, 其中, $E(\cdot)$ 和 $D(\cdot)$ 分别为求数学期望和方差, σ_0^2 和 \mathbf{P} 分别为先验单位权方差和观测值的权阵。考虑到不等权模型可变化为等权模型, 为便于推导, 此处设权阵为单位阵。式(1)的最小二乘估值为:

$$\hat{\mathbf{x}}_L = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (2)$$

式中, $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ 。当系数矩阵病态时, 最小二乘解变得极不可靠。Liu^[7]采用 Liu 估计解算病态模型参数, 其在最小二乘准则的基础上额外增加了一个约束项, 即

$$\mathbf{e}^T \mathbf{e} + f^T f = \min \quad (3)$$

式中, $f = \sqrt{\kappa} \mathbf{x} + d / \sqrt{\kappa}$ 。限于篇幅, 本文直接给出病态模型的 Liu 估计式:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{Liu}} = \mathbf{Q}_\kappa (\mathbf{A}^T \mathbf{y} - d \hat{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

式中, $\mathbf{Q}_\kappa = (\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \kappa \mathbf{I}_n)^{-1}, \kappa > 0$ 为正则化参数, d 为修正因子, $\hat{\mathbf{x}}$ 为任一估值(Liu^[7]建议采用正则化解 $\hat{\mathbf{x}}_\kappa = \mathbf{Q}_\kappa \mathbf{A}^T \mathbf{y}$ 或最小二乘解)。

2 基于偏差改正的 Liu 估计的单位权方差估计

2.1 Liu 估计的残差及其偏差

当式(4)中 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_\kappa$ 时, Liu 估计可改写为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{Liu}} = (\mathbf{Q}_\kappa - d \mathbf{Q}_\kappa^2) \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (5)$$

将式(5)代入式(1)中可得残差:

$$\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\kappa - d \mathbf{Q}_\kappa^2) \mathbf{A}^T) \mathbf{y} \quad (6)$$

对式(6)两边取期望, 得:

收稿日期: 2021-03-05

项目来源: 江西省教育厅科技项目(JGG203008)。

第一作者简介: 丁斌芬, 讲师, 主要从事数据可视化研究, E-mail: 283435024@qq.com。

$$E(\hat{\mathbf{e}}) = \mathbf{A}((\kappa + d)\mathbf{Q}_\kappa - \kappa d\mathbf{Q}_\kappa^2)\mathbf{x} \quad (7)$$

显然,由于 Liu 估计引入了 κ 和 d ,导致 $E(\hat{\mathbf{e}}) \neq 0$,因此残差估值 $\hat{\mathbf{e}}$ 的偏差为 $E(\hat{\mathbf{e}})$ 。

当式(4)中 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_L$ 时,Liu 估计可改写为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{Liu}} = (\mathbf{Q}_\kappa \mathbf{A}^\top - d\mathbf{Q}_\kappa \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^\top) \mathbf{y} \quad (8)$$

将式(8)代入式(1),可得残差为:

$$\hat{\mathbf{e}} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}\mathbf{Q}_\kappa(\mathbf{I}_n - d\mathbf{N}^{-1})\mathbf{A}^\top) \mathbf{y} \quad (9)$$

对式(9)取期望可得残差的偏差:

$$E(\hat{\mathbf{e}}) = (\alpha + d)\mathbf{A}\mathbf{Q}_\kappa \mathbf{x} \quad (10)$$

2.2 基于偏差改正的单位权方差估计

传统基于残差计算单位权方差的公式为:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^\top \hat{\mathbf{e}}}{m-n} \quad (11)$$

但 Liu 估计的残差是有偏的,因此采用式(11)计算的单位权方差显然也是有偏的。为能够应用残差估计单位权方差,须对残差中的偏差进行改正。当 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_L$ 时,Liu 估计的残差及其偏差分别为式(6)和(7),其中偏差需已知参数真值,采用正则化解代替。将偏差从残差中扣除得:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\mathbf{e}}^\top \hat{\mathbf{e}}}{(m-n+\kappa^2(\kappa+d)^2\text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^4)-2\kappa^3d(\kappa+d)\text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^5)+\kappa^4d^2\text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^6))} \quad (17)$$

当 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_L$ 时,Liu 估计的残差及其偏差分别为式(9)和式(10)。将偏差从残差中扣除得:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{e}} &= \hat{\mathbf{e}} - E(\hat{\mathbf{e}}) = \\ &= (\mathbf{I}_m - \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\kappa - d\mathbf{Q}_\kappa \mathbf{N} - 1 + (\kappa+d)\mathbf{Q}_\kappa^2)\mathbf{A}^\top) \mathbf{y} \end{aligned} \quad (18)$$

其方差为:

$$D(\bar{\mathbf{e}}) = \sigma_0^2(\mathbf{I}_m - \mathbf{K} - \mathbf{K}^\top - \mathbf{K}\mathbf{K}^\top) \quad (19)$$

式中, $\mathbf{K} = \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\kappa - d\mathbf{Q}_\kappa \mathbf{N}^{-1} + (\kappa+d)\mathbf{Q}_\kappa^2)\mathbf{A}^\top$ 。推导可得:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{K}) &= \text{tr}(\mathbf{K}^\top) = n - \kappa(\kappa+d)\text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^2), \\ \text{tr}(\mathbf{K}\mathbf{K}^\top) &= n - 2\kappa(\kappa+d)\text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^2) + \\ &\quad \sum_{i=1}^4 h_i \text{tr}(\mathbf{M}_i) + g_i \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^i) \end{aligned} \quad (20)$$

式中,

$$\begin{aligned} h_1 &= \kappa d, h_2 = \kappa d(\kappa+d), \\ h_3 &= -\kappa^2 d(\kappa+d), h_4 = -d, \\ g_1 &= d, g_2 = 0, g_3 = -\kappa d(\kappa+d), \\ g_4 &= \kappa^2(\kappa+d)^2, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Q}_\kappa, \mathbf{M}_2 = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Q}_\kappa^2,$$

$$\mathbf{M}_3 = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{Q}_\kappa^3, \mathbf{M}_4 = \mathbf{N}^{-1}$$

则 $D(\bar{\mathbf{e}})$ 的迹为:

$$\begin{aligned} \text{tr}(D(\hat{\mathbf{e}})) &= \\ \sigma_0^2(m-n+\sum_{i=1}^4 h_i \text{tr}(\mathbf{M}_i) + g_i \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^i)) \end{aligned} \quad (22)$$

顾及式(16)可得单位权方差:

$$\bar{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}} - E(\hat{\mathbf{e}}) =$$

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\kappa + \kappa\mathbf{Q}_\kappa^2 - \kappa d\mathbf{Q}_\kappa^3)\mathbf{A}^\top) \mathbf{y} \quad (12)$$

式中, $\bar{\mathbf{e}}$ 为偏差改正后的残差。由协方差传播定律可得 $\bar{\mathbf{e}}$ 的方差为:

$$D(\bar{\mathbf{e}}) = \sigma_0^2(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\kappa + \kappa\mathbf{Q}_\kappa^2 - \kappa d\mathbf{Q}_\kappa^3)\mathbf{A}^\top) \cdot$$

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{A}(\mathbf{Q}_\kappa + \kappa\mathbf{Q}_\kappa^2 - \kappa d\mathbf{Q}_\kappa^3)\mathbf{A}^\top) \quad (13)$$

令 $\mathbf{H} = (\mathbf{Q}_\kappa + \kappa\mathbf{Q}_\kappa^2 - \kappa d\mathbf{Q}_\kappa^3)\mathbf{N}$, 推导可得:

$$\text{tr}(\mathbf{H}) = n - \kappa(\kappa+d)\text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^2) + \kappa^2 d \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^3),$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{H}^2) &= n - 2\kappa(\kappa+d)\text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^2) + \\ &\quad 2\kappa^2 d \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^3) + \kappa^2(\kappa+d)^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^4) - \\ &\quad 2\kappa^3 d(\kappa+d) \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^5) + \kappa^4 d^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^6) \end{aligned} \quad (14)$$

则方差阵的迹为:

$$\begin{aligned} \text{tr}(D(\bar{\mathbf{e}})) &= \sigma_0^2(m - 2\text{tr}(\mathbf{H}) + \text{tr}(\mathbf{H}^2)) = \\ &= \sigma_0^2(m - n + \kappa^2(\kappa+d)^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^4) - \\ &\quad 2\kappa^3 d(\kappa+d) \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^5) + \kappa^4 d^2 \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^6)) \end{aligned} \quad (15)$$

由二次型的数学期望公式有:

$$E(\bar{\mathbf{e}}^\top \bar{\mathbf{e}}) = \text{tr}(D(\bar{\mathbf{e}})) + E(\bar{\mathbf{e}})^\top E(\bar{\mathbf{e}}) \quad (16)$$

经过偏差改正后, $\bar{\mathbf{e}}$ 可近似认为是无偏的,因此由式(13)和式(16)可得单位权方差:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\bar{\mathbf{e}}^\top \bar{\mathbf{e}}}{m-n+\sum_{i=1}^4 h_i \text{tr}(\mathbf{M}_i) + g_i \text{tr}(\mathbf{Q}_\kappa^i)} \quad (23)$$

3 算例与分析

3.1 数值算例

Hilbert 矩阵是一类典型的病态矩阵,假设 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为某一 Hilbert 矩阵,其元素构成为:

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n \quad (24)$$

本文取 $m=11, n=9$ 。假设未知参数的真值均为 1,则不含误差的常数项为 $\mathbf{y} = [2.83 \ 1.93 \ 1.52 \ 1.27 \ 1.10 \ 0.97 \ 0.87 \ 0.79 \ 0.72 \ 0.67 \ 0.62]^\top$ 。本算例中,法矩阵的条件数为 3.43×10^{17} ,严重病态。按照式(1)分别往常数项中添加不同量级的误差 ($\sigma_0 = 0.1, 0.01, 0.001$),分别采用最小二乘法和 Liu 估计法估计未知参数,比较其估值 $\hat{\mathbf{x}}$ 及其与真值 \mathbf{x} 的差值范数 $\|\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|$,结果如表 1~3 所示,表 4 为传统公式(式(11))与本文公式(式(17)、式(23))估计的单位权方差。

可以看出,使用最小二乘法时,估值与真值的差值范数分别为 3.67×10^6 ($\sigma_0 = 0.1$)、 1.47×10^6 ($\sigma_0 = 0.01$) 和 9.13×10^4 ($\sigma_0 = 0.001$)。在添加了不同量级的误差后,Liu 估计能够有效地抵御模型的病态性影响,参数估值的精度较最小二乘解有大幅提升。当 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_L$ 时,Liu 估计解与真值的

表 1 $\sigma_0=0.1$ 时不同算法解算的参数估值Tab. 1 Parameter estimates derived by different approaches when $\sigma_0=0.1$

真值	LS 估计	Liu 估计 ($\hat{x} = \hat{x}_k$)	Liu 估计 ($\hat{x} = \hat{x}_L$)
\hat{x}	-5.27×10^3	1.163 0	1.110 5
	1.61×10^5	1.282 0	1.336 3
	-1.09×10^6	1.115 2	1.158 6
	2.14×10^6	0.961 4	0.987 8
	1.20×10^6	0.838 3	0.851 0
	-7.92×10^6	0.740 5	0.743 2
	7.01×10^6	0.662 0	0.657 4
	-1.16×10^5	0.597 7	0.587 9
	-1.38×10^6	0.544 5	0.530 7
	3.67×10^6	0.278 5	0.287 9
$\ \Delta x\ $			

表 2 $\sigma_0=0.01$ 时不同算法解算的参数估值Tab. 2 Parameter estimates derived by different approaches when $\sigma_0=0.01$

真值	LS 估计	Liu 估计 ($\hat{x} = \hat{x}_k$)	Liu 估计 ($\hat{x} = \hat{x}_L$)
\hat{x}	-2.80×10^3	0.849 6	0.820 0
	8.64×10^4	1.228 4	1.247 0
	-5.90×10^5	1.144 4	1.162 1
	1.27×10^6	1.031 4	1.045 4
	-1.92×10^5	0.931 2	0.942 2
	-1.55×10^6	0.846 9	0.855 7
	-6.13×10^5	0.776 2	0.783 3
	3.38×10^6	0.716 2	0.722 2
	-1.79×10^6	0.664 9	0.670 0
	1.47×10^6	0.202 1	0.205 2
$\ \Delta x\ $			

表 3 $\sigma_0=0.001$ 时不同算法解算的参数估值Tab. 3 Parameter estimates derived by different approaches when $\sigma_0=0.001$

真值	LS 估计	Liu 估计 ($\hat{x} = \hat{x}_k$)	Liu 估计 ($\hat{x} = \hat{x}_L$)
\hat{x}	211.72	0.909 8	0.907 1
	-5.89×10^3	1.243 0	1.244 6
	3.71×10^4	1.176 8	1.178 3
	-7.00×10^4	1.075 4	1.076 6
	-2.68×10^4	0.981 0	0.982 0
	2.03×10^5	0.899 1	0.899 9
	-1.54×10^5	0.828 9	0.829 6
	-2.99×10^4	0.768 5	0.769 1
	4.67×10^4	0.716 2	0.716 7
	9.13×10^4	0.175 8	0.176 1
$\ \Delta x\ $			

表 4 本文公式和传统公式估计的单位权方差

Tab. 4 The unit weight variance estimated by traditional formula and formula in this paper

σ_0	$\hat{x} = \hat{x}_k$		$\hat{x} = \hat{x}_L$	
	传统公式	本文公式	传统公式	本文公式
0.1	0.117 2	0.095 6	0.116 4	0.095 5
0.01	0.015 9	0.012 1	0.015 7	0.011 7
0.001	0.001 5	0.001 1	0.001 4	0.000 9

差值范数分别为 $0.287 9 (\sigma_0=0.1)$ 、 $0.205 2 (\sigma_0=0.01)$ 和 $0.176 1 (\sigma_0=0.001)$; 当 \hat{x} 取 \hat{x}_k 时, Liu 估计解与真值的差值范数分别为 $0.278 5 (\sigma_0=0.1)$ 、 $0.202 1 (\sigma_0=0.01)$ 和 $0.175 8 (\sigma_0=0.001)$ 。

从结果来看, 随着扰动程度的增加, Liu 估计的改善效果逐渐降低, 且 \hat{x} 取 \hat{x}_k 时的参数估值要优于 \hat{x} 取 \hat{x}_L 时的参数估值。

模拟 500 次实验, 每次实验均按上述策略随机添加误差, 分别采用传统公式与本文公式估计单位权方差, 结果如图 1 所示。由于 Liu 估计的偏差性, 传统公式估计的单位权方差与模拟真值的偏差较大, 当消除了残差中的偏差之后, 本文公式估计的单位权方差与真值更为接近。当 \hat{x} 取 \hat{x}_k 时, 传统公式估计的单位权方差均值分别为 $0.131 1 (\sigma_0=0.1)$ 、 $0.013 2 (\sigma_0=0.01)$ 和 $0.001 3 (\sigma_0=0.001)$, 与真值分别相差 31.1% 、 32% 和 30% ; 本文公式估计的单位权方差均值分别为 $0.099 3 (\sigma_0=0.1)$ 、 $0.010 03 (\sigma_0=0.01)$ 和 $0.001 005 (\sigma_0=0.001)$, 与真值相差仅 0.7% 、 0.3% 和 0.5% 。

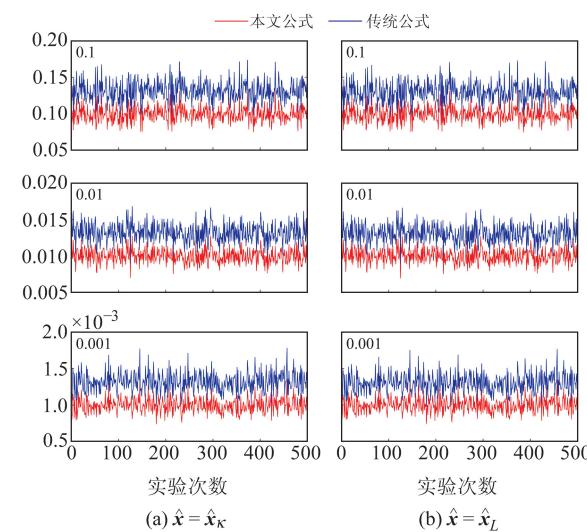


图 1 500 次实验 2 种方法估计的单位权方差

Fig. 1 The unit weight variance estimated by two approaches for 500 experiments

3.2 病态测边网算例

为进一步验证本文公式的有效性, 模拟一个病态测边网。图 2 为网的点位平面分布, 其中共有 11 个点位, 包括 9 个已知点 $P_1 \sim P_9$ 和 2 个未知点 P_{10}, P_{11} , P_{10} 和 P_{11} 的真实坐标分别为 $(0, 0, 0)$ 和 $(7, 10, -5)$ 。表 5 为 P_{10}, P_{11} 坐标及其到已知点的距离观测值, 各观测值的精度均为 5 mm。现要求利用这些距离观测值求解未知点的坐标。本算例中, 由于测边网的几何构型较差, 其观测方程的法矩阵条件数为 $4.585 1 \times 10^3$, 存在病态。

分别采用最小二乘法和 Liu 估计法求解坐标, 结果如表 6 所示。与数值算例类似, 最小二乘解与真实坐标存在较大偏差, 与真值的差值范数为 $2.659 4$; 而 Liu 估计则与真实坐标较为接近, 与真值的差值范数仅为 $0.277 0$ ($\hat{x} = \hat{x}_L$) 和 $0.262 3$

$(\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_k)$, 较最小二乘解有所改善。表6同时还列出了传统公式与本文公式计算的单位权方差,显然本文公式估计的单位权方差与真值更为接近。

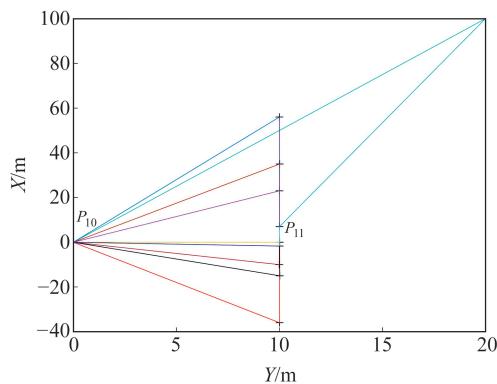


图2 空间测边网的点位平面分布
Fig. 2 The distribution of the points of the space net in XY plane

表5 控制点的坐标及距离观测值

Tab. 5 The coordinates and distance observations of control points

点号	坐标/m			距离观测值/m	
	X	Y	Z	$d_{i,10}$	$d_{i,11}$
P_1	23.000	10.000	0.010	25.078 69	16.765 17
P_2	-10.000	9.990	0.000	14.134 51	17.719 65
P_3	35.000	10.010	-0.010	36.415 88	28.442 94
P_4	100.000	19.990	0.005	101.479 43	93.168 39
P_5	-36.000	10.005	0.000	37.364 22	43.299 05
P_6	0.000	10.010	-0.005	10.010 04	8.600 60
P_7	56.000	9.995	0.010	56.996 06	49.256 18
P_8	-15.000	10.015	-0.010	18.035 90	22.559 66
P_9	-1.700	10.008	0.015	10.150 63	10.043 82

表6 不同算法解算的参数估值及与真值的差值范数

Tab. 6 Parameter estimates derived by different approaches and norms of their differences with true values

	真值/m	$\hat{\mathbf{x}}_L$ /m	$\hat{\mathbf{x}}_{Liu}$ /m	$\hat{\mathbf{x}}_{Liu}$ /($\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}_L$)/m
\hat{x}_{10}	0	0.051 7	0.012 9	0.012 2
\hat{Y}_{10}	0	-0.108 5	0.025 7	0.024 5
\hat{Z}_{10}	0	-5.621 9	0.043 9	0.038 8
\hat{x}_{11}	7	6.900 5	6.771 2	6.649 0
\hat{Y}_{11}	10	13.207 5	10.502 7	10.432 2
\hat{Z}_{11}	-5	-5.718 3	-5.390 8	-5.317 3
$\ \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\ $	0	2.659 4	0.277 0	0.262 3
传统公式			4.776 5	4.796 1
本文公式			4.976 0	5.011 3

模拟500实验,每次实验均按相同策略向观测值中添加随机误差,分别采用传统公式和本文公式估计单位权方差,结果如图3所示。由图可知,本文公式估计的单位权方差小于传统公式,当 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 时,传统公式与本文公式估计的单位权方差分别为4.989 1和6.459 9,与真值分别相差0.21%和29.20%,再次证明了本文公式所估的单位权方差近似无偏;当 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 时,其解算结果与 $\hat{\mathbf{x}}$ 取 $\hat{\mathbf{x}}_k$ 时极为接近,不再赘述。

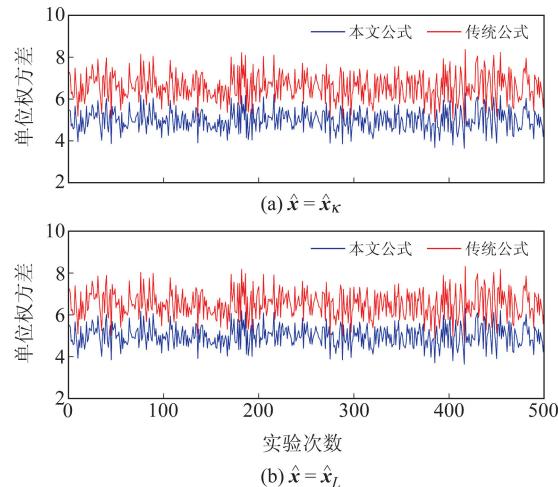


图3 500次实验2种方法估计的单位权方差
Fig. 3 The unit weight variance estimated by two approaches for 500 experiments

4 结语

Liu估计是病态模型的常用解法之一,其通过引入正则化参数和修正因子有效地削弱了系数阵小奇异值对参数估值及其方差的放大,但同时也引进了偏差,进一步导致其残差也是有偏的。本文首先计算了Liu估计残差的偏差,并将其从残差中剔除,得到偏差改正后的残差;然后基于向量二次型的数学期望公式,利用改正后的残差导出Liu估计的单位权方差估计公式;最后设计2个算例对本文公式进行验证。结果表明,残差中的偏差会严重影响单位权方差的估计,在将偏差从残差中扣除后,利用改正后的残差估计的单位权方差更符合实际情形。

参考文献

- [1] Johansen T A. On Tikhonov Regularization, Bias and Variance in Nonlinear System Identification[J]. Automatica, 1997, 33(3): 441-446
- [2] Tikhonov A N. Regularization of Ill-Posed Problems[J]. Doklady Akademii Nauk SSSR, 1963, 151(1): 49-52
- [3] Xu P L. Truncated SVD Methods for Discrete Linear Ill-Posed Problems[J]. Geophysical Journal International, 1998, 135(2): 505-514
- [4] Hansen P C. Truncated Singular Value Decomposition Solutions to Discrete Ill-Posed Problems with Ill-Determined Numerical Rank[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1990, 11(3): 503-518
- [5] Xu P L. Iterative Generalized Cross-Validation for Fusing Heteroscedastic Data of Inverse Ill-Posed Problems[J]. Geophysical Journal International, 2009, 179(1): 182-200
- [6] Fierro R D, Hansen P C. Accuracy of TSVD Solutions Computed from Rank-Revealing Decompositions[J]. Numerische Mathematik, 1995, 70(4): 453-471

(下转第1263页)