第28卷第2期
2008年4月

大地测量与地球动力学
JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS

Vol. 28 No. 2
Apr. ,2008

文章编号:1671-5942(2008)02-0077-04

IGS精密星历内插与拟合法精度的比较*

李明峰　江国焰　张　凯
(南京工业大学土木工程学院,南京　210009)

摘　要　对GPS卫星精密星历Lagrange插值、Neville插值、Chebyshev多项式拟合以及Legendre多项式拟合算法进行了比较分析。结果表明,插值算法在8阶时计算精度最高,拟合算法最佳阶数为9;相同阶次的插值算法精度相同,相同阶次的拟合算法精度相同;相同阶次的拟合算法适用的历元时段较插值算法长。

关键词　精密星历;Lagrange插值;Neville插值;Chebyshev多项式拟合;Legendre多项式拟合
中图分类号:P207　　**文献标识码**:A

COMPARISON OF INTERPOLATING AND FITTING IGS PRECISE EPHEMERIS

Li Mingfeng, Jiang Guoyan and Zhang Kai
(*College of Civil Engineering*, *Nanjing University of Technology*, *Nanjing*　210009)

Abstract　The principles of Lagrange interpolation, Neville interpolation, Chebyshev polynomial fitting and Legendre polynomial fitting were analysized compared with each other. The results indicate that the best orders of interpolating algorithm and fitting algorithm are 8 and 9 respecdively and each algorithm has the same accuracy when their orders are the same. Besides, the stage of epoch which fitting algorithm is suitable to is longer than that for interpolating algorithm in the same order.

Key words: precise ephemeris; Lagrange interpolation; Neville interpolation; Chebyshev polynomial fitting; Legendre polynomial fitting

1　引言

IGS(International GPS Service,国际GPS服务)发布的GPS精密星历精度优于5 cm,但采样率为15分钟,不能满足GPS数据后处理的需要,因此有必要采用合理的数学模型计算所需历元时刻的卫星坐标[1,2]。目前,利用IGS精密星历求任意时刻卫星坐标的方法可分为插值法和拟合法两大类。常用的插值法如Lagrange插值、Neville插值等;常用的拟合法包括Chebyshev多项式拟合和Legendre多项式拟合。

本文在分析Lagrange插值、Neville插值、Chebyshev多项式拟合和Legendre多项式拟合算法特点的基础上,通过数值模拟计算比较不同阶次每种算法的精度高低,并确定出4种算法计算GPS卫星坐标并且误差小于1 cm所需的最低阶数。

* 收稿日期:2007-10-28
基金项目:国家自然科学基金(50278042)
作者简介:李明峰,男,1964年生,教授,主要从事变形监测数据处理和3S技术应用研究. E-mail:njuter@163.com

2 插值算法与拟合算法的数学模型

1) Lagrange 插值[3-7]

设有 $n+1$ 个节点时刻 $t_0,t_1,\cdots,t_n$,对应的精密星历为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$,则计算任意时刻 GPS 卫星坐标的 n 阶插值多项式可写为

$$y(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(t-t_0)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)}y_i \tag{1}$$

2) Neville 插值[5,8]

设在 $n+1$ 个节点时刻 $t_0,t_1,\cdots,t_n$ 上卫星精密星历分别为 $y_0,y_1,\cdots,y_n$。令 $P_{i,0}=y_i(i=0,1,\cdots,n)$,则有

$$P_{i,j}=\frac{(t-t_i)P_{i-1,j-1}-(t-t_{i-j})P_{i,j-1}}{t_{i-j}-t_i}$$
$$(i,j=1,2,\cdots,n) \tag{2}$$

详细的算法流程见表 1。

表 1 Neville 算法流程

Tab. 1 Neville algorithm flow

历元时刻	第 1 步	第 2 步	第 3 步	…	第 n 步
t_0	$P_{0,0}$				
t_1	$P_{1,0}$	$P_{1,1}$			
t_2	$P_{2,0}$	$P_{2,1}$	$P_{2,2}$	$\ddots$	
⋮	⋮	⋮	⋮		
t_n	$P_{n,0}$	$P_{n,1}$	$P_{n,2}$	…	$P_{n,n}$

由表 1 可以看出,若 Neville 插值的精度不满足要求,此时只须遵照表 1 直接增加节点即可,无需重新计算系数。这是 Neville 插值较 Lagrange 插值的最大优势所在。当 $|P_{i,j}-P_{i-1,j-1}|<\varepsilon$($\varepsilon$ 为设定的阈值)时,$P_{i,j}$即为任意时刻 GPS 卫星在 WGS84 坐标系中的位置。

3) Chebyshev 多项式拟合[3,9,10]

由于 Chebyshev 多项式只适用于自变量区间为 $[-1,1]$的情况,因此在时间段$[t_0,t_0+\Delta t]$内(t_0 为初始时刻,Δt 为拟合时间长度)采用 n 阶 Chebyshev 多项式拟合时,首先需要利用公式

$$\tau=\frac{2(t-t_0)}{\Delta t}-1 \quad t\in[t_0,t_0+\Delta t] \tag{3}$$

将变量 t 的区间归化到$[-1,1]$。则由文献[3]可知,GPS 卫星坐标的 Chebyshev 拟合多项式可表示为

$$y(\tau)=\sum_{i=0}^{n}C_{y_i}T_i(\tau) \tag{4}$$

式中,n 为多项式阶数;C_{y_i}为多项式系数;$T_i(\tau)$为第 i 阶 Chebyshev 多项式,可通过其具有的下列递推关系求出:

$$T_0(\tau)=1,T_1(\tau)=\tau,T_n(\tau)=2\tau T_{n-1}(\tau)-T_{n-2}(\tau)$$
$$(n=2,3,\cdots) \tag{5}$$

在时间段$[t_0,t_0+\Delta t]$内选取 $m(m>n+1)$个节点历元,由式(4)可得到该 m 个历元时刻的 GPS 卫星拟合坐标(含未知数 C_{y_i})。将拟合坐标与已知的 IGS 精密星历求差,即

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y} \tag{6}$$

式中,$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}V(\tau_1)\\V(\tau_2)\\\\V(\tau_m)\end{bmatrix}_{m\times1}$,$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{BC}$,

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}T_0(\tau_1)&T_1(\tau_1)&\cdots&T_n(\tau_1)\\T_0(\tau_2)&T_1(\tau_2)&\cdots&T_n(\tau_2)\\\vdots&\vdots&&\vdots\\T_0(\tau_m)&T_1(\tau_m)&\cdots&T_n(\tau_m)\end{bmatrix}_{m\times n}$$

$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}C_{y_0}\\C_{y_1}\\\\C_{y_n}\end{bmatrix}_{n\times1}$;$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}Y(\tau_1)\\Y(\tau_2)\\\\Y(\tau_m)\end{bmatrix}_{m\times1}$,$Y(\tau_i)$表示节点时刻的 IGS 精密星历。

根据最小二乘 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}=\min$ 准则,可知 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PB})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PY}$。由于各卫星轨道为等权观测,所以 $\boldsymbol{P}$ 为单位阵,因此求解多项式系数矩阵的表达式可改写成 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$。将 $\boldsymbol{C}$ 回代入式(4)即可得到求解任意时刻 GPS 卫星坐标的拟合多项式(仅含未知数 τ)。

4) Legendre 多项式拟合[3]

与 Chebyshev 多项式拟合类似,归化时间 t 的区间后, GPS 卫星坐标的 Legendre 拟合多项式可表示为

$$y(\tau)=\sum_{i=0}^{n}C_{y_i}P_i(\tau) \tag{7}$$

式中,n 为多项式阶数;C_{y_i}为多项式系数;$P_i(\tau)$为第 i 阶 Legendre 多项式,可通过其具有的下列递推关系求出:

$$P_0(\tau)=1,P_1(\tau)=\tau,P_n(\tau)=\frac{2n-1}{n}\tau P_{n-1}(\tau)-$$
$$\frac{n-1}{n}P_{n-2}(\tau)(n=2,3,\cdots) \tag{8}$$

式(7)中多项式系数矩阵同样需要根据最小二乘准则来求解,这里不再一一赘述。

3 插值与拟合法实例分析

为了能客观如实地反映上述 4 种方法的计算精度,本文通过数值算例从精度、阶数和历元间隔 3 个方面进行比较。详细的分析比较可分为 3 个过程,首先比较 Chebyshev 多项式拟合与 Legendre 多项式

拟合的精度;其次分别利用 Chebyshev 拟合多项式和 Legendre 拟合多项式计算出两套若干个等时间间隔的 GPS 卫星坐标;最后用 Chebyshev 拟合多项式计算出的坐标比较 Lagrange 插值、Neville 插值与 Legendre 多项式拟合的精度,而 Legendre 拟合多项式计算出的坐标用于比较 Lagrange 插值、Neville 插值与 Chebyshev 多项式拟合的精度。

3.1　拟合算法的精度比较

在 IGS 发布的精密星历中,选取 2007 年 8 月 15 日在时间段 0 时 0 分 0 秒至 2 时 15 分 0 秒内 PRN(Pseudo Random Noise,随机噪声码)为 1 的 GPS 卫星星历,将其作为真值。分别采用不同阶次的 Chebyshev 多项式和 Legendre 多项式拟合 GPS 卫星轨道,并将计算结果进行比较(表 2)。

表 2　拟合算法的计算结果(单位:cm)

Tab. 2　Results of fitting algorithm(unit:cm)

算法	阶次	MAXD			RMS		
		X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
Chebyshev	7	6.614	0.422	0.875	3.573	0.239	0.472
	8	0.115	0.606	0.334	0.064	0.335	0.019
	9	0.027	0.044	0.003	0.014	0.023	0.002
Legendre	7	6.614	0.422	0.875	3.573	0.239	0.472
	8	0.115	0.606	0.334	0.064	0.335	0.019
	9	0.027	0.044	0.003	0.014	0.023	0.002

一般来说,卫星单点定位误差的量级大体上与卫星星历误差的量级相当[2];因此由表 2 可知,当阶数达到 8 时两种精密星历拟合算法均能满足厘米级的精密单点定位的需要。另外,通过大量的数值模拟计算发现,采用相同阶次的 Chebyshev 多项式和 Legendre 多项式拟合 GPS 卫星轨道的误差在毫米量级上完全相等,表 2 亦能体现。

3.2　Legendre 多项式拟合与插值算法的精度比较

通过对拟合算法进行数值模拟计算发现,采用 9 阶 Chebyshev 和 Legendre 多项式拟合 GPS 卫星精密星历,误差小于 1 mm。因此,在比较 Legendre 多项式拟合和插值算法的精度时,本文采用 9 阶 Chebyshev 多项式计算在时间段 0 时 10 分 0 秒至 1 时 50 分 0 秒内 GPS 卫星坐标(精确到毫米),并将其作为真值。

在指定时间段内,从求取的真值中等历元间隔(大于 5 分钟)选取 GPS 卫星坐标,分别采用不同阶次的 Legendre、Lagrange 和 Neville 多项式计算等间隔为 5 分钟的 GPS 卫星坐标,并与用 Chebyshev 多项式求取的真值比较,结果见表 3。

由表 3 可知,相同阶次的 Lagrange 插值与 Neville 插值的最大误差和精度完全相同,通过大量数值计算也进一步验证了 Lagrange 插值和 Neville 插值的一致性[9];并且两种插值算法均在 8 阶时达到最佳。另外,Legendre 多项式拟合算法在 8 阶和 9 阶时较插值算法理想,并且没有出现精度衰减现象。

表 3　数值计算结果(单位:cm)

Tab. 3　Results of numerical calculation(unit:cm)

算法	阶次	MAXD			RMS		
		X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
Lagrange	7	0.791	0.241	0.222	0.240	0.069	0.059
	8	0.172	0.189	0.178	0.058	0.057	0.048
	9	0.278	0.210	0.227	0.072	0.061	0.056
Neville	7	0.791	0.241	0.222	0.240	0.069	0.059
	8	0.172	0.189	0.178	0.058	0.057	0.048
	9	0.278	0.210	0.227	0.072	0.061	0.056
Legendre	7	1.571	0.315	0.285	0.576	0.103	0.087
	8	0.129	0.161	0.112	0.039	0.051	0.033
	9	0.117	0.122	0.150	0.044	0.043	0.043

3.3　Chebyshev 多项式拟合与插值算法的精度比较

与 3.2 类似,首先采用 9 阶 Legendre 多项式计算在时间段 0 时 10 分 0 秒至 1 时 50 分 0 秒内 GPS 卫星坐标,并将其作为真值。值得注意的是,精确到毫米时,两种拟合算法的计算结果完全一致。这就导致了在比较 Chebyshev 多项式拟合和插值算法的精度时,插值法的计算结果与表 3 中所列数据完全一致。下面仅给出 Chebyshev 多项式的计算结果。

表 4　Chebyshev 多项式拟合结果(单位:cm)

Tab. 4　Results of Chebyshev polynomial fitting(unit:cm)

算法	阶次	MAXD			RMS		
		X	*Y*	*Z*	*X*	*Y*	*Z*
Chebyshev	7	1.571	0.316	0.285	0.576	0.103	0.087
	8	0.129	0.161	0.112	0.039	0.051	0.033
	9	0.117	0.122	0.150	0.044	0.043	0.043

表 4 进一步说明了相同阶次的 Chebyshev 多项式和 Legendre 多项式拟合 GPS 卫星轨道的精度相同。另外,由于拟合算法在 8 阶时的最大误差较 9 阶时大,而均方差较 9 阶时小,因此 9 阶多项式拟合的坐标残差波动的幅度较 8 阶小;并且由于 9 阶多项式拟合的历元时段较 8 阶长,因此在实际工程应用中拟合算法当取 9 阶。综合表 3 和表 4,可知相同阶次的拟合算法适用的历元时段较插值算法长,并且计算 GPS 卫星的坐标残差波动的幅度较插值算法小。

通过实例分析得到插值算法的最佳阶数为 8，而拟合算法的最佳阶数为 9，但对 8 阶插值算法和 9 阶拟合算法的残差波动幅度尚不清楚，为此特给出图 1。

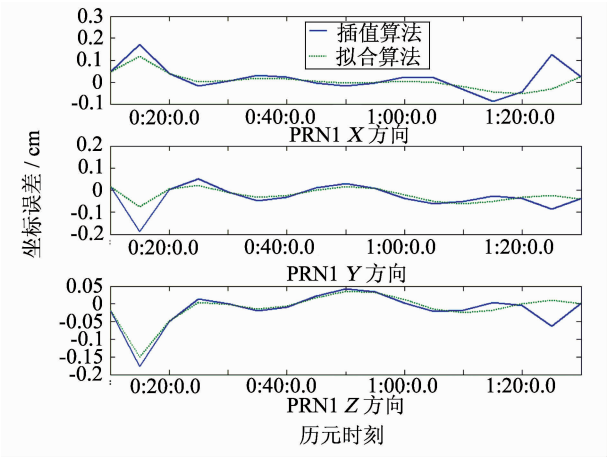


图 1 8 阶插值残差

Fig. 1 Interpolation residuals in eight order

从图 1 中可以看出，插值算法的残差总体波动幅度较拟合算法大。另外，无论是插值算法还是拟合算法均会在端点附近产生龙格(Runge)震荡现象。通过大量数值计算发现，震荡现象发生的时间段为 10 分钟左右。这是由插值多项式和拟合多项式的数学特性引起的。因此在实际工程应用中应考虑采用 9 阶多项式拟合算法求解任意时刻的 GPS 卫星坐标。

4 结论

1) Lagrange 插值和 Neville 插值的实质是一致的。与 Lagrange 插值不同的是，当阶数增加时，Neville 插值的原有计算仍有价值，无需重新计算。另外，Lagrange 插值和 Neville 插值的最佳阶数均为 8；

2) 相同阶次的 Lagrange 插值与 Neville 插值的误差大小和精度相同；相同阶次的 Chebyshev 多项式和 Legendre 多项式拟合的误差大小和精度相同。但相同阶次的插值算法残差总体波动幅度较拟合算法大；

3) 插值算法和拟合算法计算 GPS 卫星坐标的过程，可以理解成是叠加若干个曲线段逼近 GPS 卫星运行轨迹的过程。因此，每一种方法均存在一个最佳的时间长度，在这一时间长度内计算，残差最小，精度最高。通过大量数值计算，从精度、阶数和历元间隔 3 方面衡量，得到用 9 阶拟合多项式求解 GPS 卫星坐标效果最好。

参 考 文 献

1 李明峰，冯宝红，刘三枝. GPS 定位技术及其应用[M]. 北京：国防工业出版社，2005.

1 Li Mingfeng, Feng Baohong and Liu Sanzhi. GPS positioning technology and application[M]. Beijing: Defense Industry Press, 2005. (in Chinese)

2 李征航，黄劲松. GPS 测量与数据处理[M]. 武汉：武汉大学出版社，2005.

2 Li Zhenghang and Huang Jingsong. GPS measurements and data processing[M]. Whan: Wuhan University Press, 2005. (in Chinese)

3 李庆杨，王能超，易大义. 数值分析[M]. 北京：清华大学出版社，2001.

3 Li Qingyang, Wang Nengchao and Yi Dayi. Numerical analysis[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001. (in Chinese)

4 张守建，等. 两种 IGS 精密星历插值方法的比较分析[J]. 大地测量与地球动力学，2007，27(2)：80 - 83.

4 Zhang Shoujian, et al. Comparative analysis on two methods for IGS precise ephemeris interpolation[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2007, 27(2): 80 - 83. (in Chinese)

5 魏二虎，柴华. GPS 精密星历插值方法的比较研究[J]. 全球定位系统，2006，5：13 - 15.

5 Wei Erhu and Chai Hua. The comparison research on GPS precise ephemeris interpolation methods[J]. GNSS World of China, 2006, 5: 13 - 15. (in Chinese)

6 洪樱，欧吉坤，彭碧波. GPS 卫星精密星历和钟差三种内插方法的比较[J]. 武汉大学学报信息科学版，2006，31(6)：516 - 518.

6 Hong Yin, Ou Jikun and Peng Bibo. Three interpolation Mmethods for precise ephemeris and clock offset of GPS satellite[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2006, 31(6): 516 - 518. (in Chinese)

7 Mark Schenewerk. A brief review of basic GPS orbit interpolation strategies[J]. GPS Solutions, 2003, 6: 265 - 267.

8 关治，陈景良. 数值计算方法[M]. 北京：清华大学出版社，1990.

8 Guan Zhi and Chen Jingliang. Numerical calculation method[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990. (in Chinese)

9 孔巧丽. 用 Chebyshev 多项式拟合 GPS 卫星精密坐标[J]. 测绘通报，2006，8：1 - 3.

9 Kong Qiaoli. Using Chebyshev polynomial to fit theprecise satellite ephemeris[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2006, 8: 1 - 3. (in Chinese)

10 Jan Kouba, Pierre Hefous. Precise Point Positioning Using IGS Orbit and Clock Products[J]. GPS Solutions, 2001, 5(2): 12 ~ 28.