

## 抗差估计在 CHAMP 重力场恢复中的应用\*

徐天河<sup>1, 2)</sup> 贺凯飞<sup>3)</sup>

- (1) 西安测绘研究所, 西安 710054  
(2) 武汉大学测绘学院, 武汉 430079  
(3) 长安大学, 西安 710054

**摘要** 模拟分析粗差对 CHAMP 卫星重力场恢复结果的影响:即使观测值中仅存在 1 个大的粗差,由最小二乘 (LS) 估计得到的 CHAMP 重力场模型精度整体上也有所降低,而由此计算的大地水准高在粗差存在的前后区域都将出现较大偏差。对此,将抗差估计引入 CHAMP 重力场恢复中,给出了抗差解及其误差影响函数。基于德国 GFZ 数据中心提供的 1 个月 CHAMP 卫星 RSO 轨道和加速度计数据,并随机加入 20 个模拟的、(5 ~ 100)  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$  大小的异常误差,分别利用 LS 和抗差估计解算出  $60 \times 60$  阶地球重力场模型,并与 EIGEN-CG03C、EIGEN2 等模型进行比较。结果表明:抗差解能有效控制异常误差影响,得到的 CHAMP 重力场模型精度明显优于 LS 解模型,且优于同阶次的 EGM96、EIGEN1S 和 EIGEN2 模型。

**关键词** CHAMP 卫星;最小二乘;抗差估计;快速科学轨道(RSO);GFZ 数据中心

中图分类号:P227

文献标识码:A

### APPLICATION OF ROBUST ESTIMATION TO CHAMP GRAVITY FIELD RECOVERY

Xu Tianhe<sup>1, 2)</sup> and He Kaifei<sup>3)</sup>

- (1) Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054  
(2) School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079  
(3) Chang'an University, Xi'an 710054

**Abstract** A numerical simulation was made to examine the influence of outliers on CHAMP gravity field recovery. It shows that the model accuracy from least square (LS) estimation is wholly decreased even if with only one large outlier occurs, and there is a large bias in geoid heights in the large area around the location where the outlier exists. In order to overcome this problem, robust estimation is introduced into the CHAMP gravity field recovery and its influence function of errors is also given. For one month CHAMP rapid science orbit (RSO) and accelerometer data from GFZ with randomly added to simulated outliers from 5 to 100  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$  two  $60 \times 60$  degree gravity field models were solved by LS and robust estimation individually and compared with other models such as EIGEN-CG03C, EIGEN2. The results show that the robust solution can efficiently control the influence of the outliers. RO-CHAMP model is obviously more accurate than LS-CHAMP one, and more accurate than EGM96, EIGEN1S, and EIGEN2 at the same degree and order.

\* 收稿日期:2007-10-29

基金项目:国家自然科学基金(40604003;40474001)

作者简介:徐天河,男,1975年生,副研究员,博士,武汉大学测绘科学与技术流动站博士后,主要从事卫星重力数据处理和卫星导航理论与方法研究。E-mail: xtianhe@263.net

**Key words:** satellite CHAMP; Least Square; robust estimation; rapid science orbits (RSO); GFZ (Geo Forschungs Zentrum)

## 1 引言

德国 CHAMP 卫星于 2000 年 7 月成功发射,它装载有 GPS 接收机和三轴加速度仪,是第一颗提供卫星位置数据和非保守力数据的低轨卫星。利用这些数据,可简便、快捷地获取全球重力场模型<sup>[1-8]</sup>。能量守恒方法是目前用于恢复 CHAMP 重力场模型最为常用和有效的方法之一,它通过能量守恒方程计算卫星各采样点处的扰动位,然后根据扰动位与位系数间的关系式,利用最小二乘方法(LS)解算位系数。CHAMP 卫星轨道和加速度计数据中不可避免地存在观测异常或粗差,影响到扰动位序列,如果不对这些粗差进行剔除或控制,将会对 CHAMP 重力场恢复的 LS 解造成污染或扭曲<sup>[9]</sup>。针对粗差的控制,目前常用的有两种方法:粗差探测和抗差估计。粗差探测通过构造检验统计量对粗差进行探测,该方法的缺点是所构造的检验统计量一般基于最小二乘估计,不可避免受到粗差影响,由此可能导致探测错误或失败。抗差估计是控制粗差的有效方法,它通过等价权对粗差观测值进行控制,消除或减弱异常误差的影响。本文首先分析了粗差对 CHAMP 重力场恢复的影响,然后给出 CHAMP 重力场恢复的抗差解及其影响函数,最后通过实际算例对 CHAMP 重力场恢复的 LS 解和抗差解进行了比较,并对两种方法获得的重力场精度进行了评价。

## 2 CHAMP 重力场恢复的最小二乘解

CHAMP 重力场恢复中常用的方法之一是能量法,惯性系下 CHAMP 卫星运行中的能量守恒方程可表示为<sup>[2, 5, 6]</sup>

$$T = \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 - V_s - V_m - \omega(xv_y - yv_x) - F - E_0 - U \quad (1)$$

其中  $T$  为地球重力场扰动位,  $\frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2$  为卫星的动能,  $\mathbf{v} = (v_x \ v_y \ v_z)^T$  为卫星的速度矢量,  $V_s$  和  $V_m$  分别为太阳和月球产生的引力位,  $\omega$  为地球自转角速度,  $\mathbf{x} = (x \ y \ z)$  为卫星位置矢量,  $F$  是由非保守力引起的能量损失或耗散,  $E_0$  为积分常量,  $U$  为地球重力场正常位(不包括离心力位),通常取 GRS80 的正常重力位。显然,当卫星位置、速度及加速度计观测值已知时,由式(1)便可计算卫星高度处的扰动位,进而可利用扰动位与位系数间的关系,采用最小二乘法估计位系数。

地固系下,地球引力位函数的非球形部分为:

$$T = \sum_{n=2}^N \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \bar{U}_n^m + \bar{S}_{nm} \bar{V}_n^m) \quad (2)$$

其中:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_n^m &= \frac{GM_e a_e^n \bar{P}_n^m(\sin\varphi) \cos m\lambda}{r^{n+1}} \\ \bar{V}_n^m &= \frac{GM_e a_e^n \bar{P}_n^m(\sin\varphi) \sin m\lambda}{r^{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

上式中,  $\varphi$  和  $\lambda$  为空间单位质点在地固系中的纬度和经度,  $a_e$  为地球平均半径,  $GM_e$  为地球引力系数,  $\bar{P}_n^m(\sin\varphi)$  为正常化的缔合勒让德多项式,  $\bar{C}_{nm}$  和  $\bar{S}_{nm}$  为正常化的地球引力位系数,  $n$  和  $m$  为多项式的阶和次,  $\bar{U}_n^m$  和  $\bar{V}_n^m$  可以通过递推公式求得。

将上述公式写成如下线性方程:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} + \mathbf{e} \quad (4)$$

$\mathbf{y}$  为扰动位观测值,  $\boldsymbol{\xi}$  为未知的球谐系数,  $\mathbf{A}$  为设计矩阵,  $\mathbf{e}$  为残差向量。设观测个数为  $K$ , 球谐函数展开式截断至阶数  $L$ , 写成离散的形式, 则

$$\mathbf{y} = (T(t_1) \ T(t_2) \ \cdots \ T(t_k))^T \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\bar{C}_{2,0} \ \bar{C}_{2,1} \ \bar{C}_{2,2} \ \cdots \ \bar{C}_{L,L} \ \bar{S}_{2,1} \ \bar{S}_{2,2} \ \cdots \ \bar{S}_{L,L})^T \quad (6)$$

$\mathbf{A} =$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_2^0(t_1) & \bar{U}_2^1(t_1) & \cdots & \bar{U}_L^L(t_1) & \bar{V}_2^0(t_1) & \bar{V}_2^1(t_1) & \cdots & \bar{V}_L^L(t_1) \\ \bar{U}_2^0(t_2) & \bar{U}_2^1(t_2) & \cdots & \bar{U}_L^L(t_2) & \bar{V}_2^0(t_2) & \bar{V}_2^1(t_2) & \cdots & \bar{V}_L^L(t_2) \\ \cdots & \cdots \\ \bar{U}_2^0(t_k) & \bar{U}_2^1(t_k) & \cdots & \bar{U}_L^L(t_k) & \bar{V}_2^0(t_k) & \bar{V}_2^1(t_k) & \cdots & \bar{V}_L^L(t_k) \end{bmatrix} \quad (7)$$

其中  $\bar{U}_n^m(t_i)$  和  $\bar{V}_n^m(t_i)$  可递推求得。

式(4)的最小二乘解为:

$$\hat{\boldsymbol{\xi}}_{LS} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y} \quad (8)$$

其中  $\mathbf{P}$  为观测值的权阵。

## 3 粗差对 CHAMP 重力场恢复 LS 解的影响分析

我们可以从误差影响函数考察 CHAMP 重力场恢复的 LS 解对粗差的敏感情况。式(8)的观测误差影响函数为<sup>[10]</sup>

$$IF(y_j, \hat{\boldsymbol{\xi}}_{LS}, F_{\Delta}) = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ij} p_{ij} \Delta_j \quad (9)$$

其中  $a_{ij}$ 、 $p_{ij}$  分别为设计矩阵和权矩阵的第  $i$  行第  $j$  列的元素,  $\Delta_j$  为第  $i$  个观测值的观测误差。由式(9)可知, 观测误差  $\Delta_j$  对 LS 解的影响函数直接取决于误差  $\Delta_j$ , 显然当观测值中含有异常值时, LS 解将受到扭曲。

为了更直观地了解粗差对 CHAMP 重力场恢复 LS 解的影响,我们以德国 GFZ 数据中心提供的 30 天的 CHAMP 卫星轨道作为轨道真值,利用截断至 60 阶 EGM96 模型计算卫星高度处的扰动位序列,加入期望为 0、方差为  $0.5 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  的随机误差。然后在随机挑选的卫星位置:纬度为  $-48.809480^\circ$ ,经度为  $-131.067820^\circ$ ,高度为  $425427.2 \text{ m}$  处计算的扰动位加入  $100 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$  的粗差,分析观测值中仅存在 1 个粗差情况下,异常值对 CHAMP 重力场恢复 LS 解的影响。分别给出了无粗差的 LS 解和含粗差情况下的 LS 解,将计算出的重力场模型与“真值”EGM96 进行比较,结果见图 1 和图 2,其中图 1 为位系数差值阶误差均方根结果,图 2 为  $2^\circ \times 2^\circ$  大地水准面差值结果。

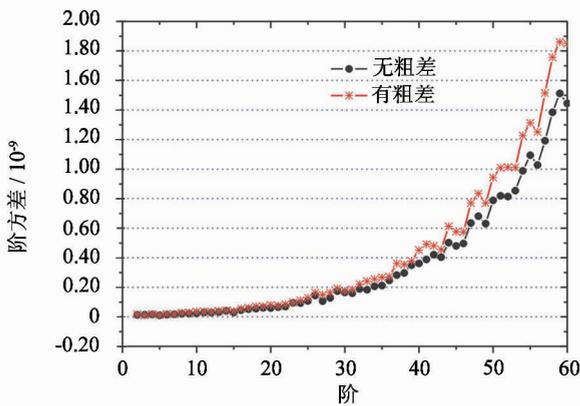


图 1 有粗差和无粗差情况下 LS 计算得到的重力场模型位系数与 EGM96 模型位系数差值的阶方差

Fig. 1 Degree variances between EGM96 and the model from LS without outlier, and the model from LS with an outlier, respectively

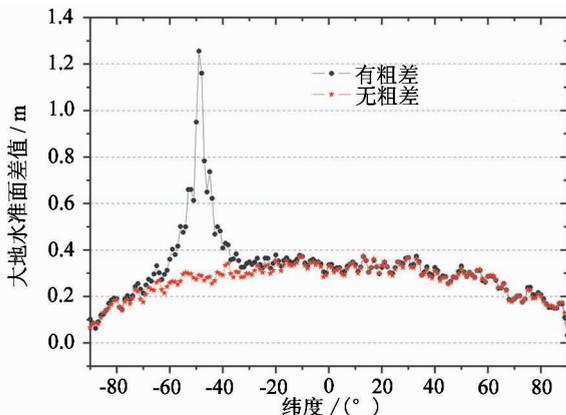


图 2 有粗差和无粗差情况下 LS 计算得到的重力场模型与 EGM96 模型大地水准面高度差值结果

Fig. 2 Geoid differences between EGM96 and the model from LS without outlier, and the model from LS with an outlier, respectively

由上述结果可以看出:当观测值中仅存在 1 个

大的粗差时,将会造成基于 LS 解的 CHAMP 重力场精度的整体降低(图 1)。从大地水准面差值的结果来看,含有粗差的 LS 解的大地水准面精度受粗差影响严重,特别是在粗差出现的前后区域内尤为明显。为了控制粗差的影响,应采用抗差估计方法加以控制。

## 4 抗差估计应用于 CHAMP 重力场恢复

方程(4)的抗差解可写成如下形式:

$$\hat{\xi}_{RO} = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{y} \quad (10)$$

其中  $\bar{\mathbf{P}}$  为等价权,可采用 IGG3 方案<sup>[11]</sup>

$$\bar{p}_{ij} = p_{ij} w_i \quad (11)$$

$$w_i = \begin{cases} 1 & |\tilde{v}_i| \leq k_0 \\ \frac{k_0}{|\tilde{v}_i|} \left( \frac{k_1 - |\tilde{v}_i|}{k_1 - k_0} \right) & k_0 < |\tilde{v}_i| \leq k_1 \\ 0 & |\tilde{v}_i| > k_1 \end{cases} \quad (12)$$

式中  $w_i$  为降权因子,  $|\tilde{v}_i| = \left| \frac{v_i}{\sigma_i} \right|$  为标准残差,  $k_0$  和  $k_1$  为常量,分别取为  $2.0 \sim 3.0$  和  $4.5 \sim 8.5$ 。

由式(11)和(12)可看出,当残差达到可信的边界时,降权因子  $w_i$  会减小,从而观测值的权也相应减小,由此降低了测量粗差的影响。为了保持原有权矩阵的相关性及对称性,可采用双因子抗差估计,有关内容可参见文献[12]。抗差解式(10)的误差影响函数为

$$\mathbf{IF}(y_j, \hat{\xi}_{RO}, \mathbf{F}_\Delta) = (\mathbf{A}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A})^{-1} \sum_{i=1}^n a_{ij} \bar{p}_{ij} \Delta_j \quad (13)$$

从影响函数式(13)看,观测误差  $\Delta_j$  对抗差解的影响主要取决于等价权,当  $\Delta_j$  增大到某界值时,  $p_{ij}$  减小,甚至为 0,由于等价权的作用,当观测值受到污染时,CHAMP 重力场恢复的抗差解能减免粗差干扰。

## 5 计算与比较

采用 GFZ 提供的 2003 年 6 月共 30 天的快速科学轨道(RSO)轨道和加速度计数据进行重力场模型恢复<sup>[9]</sup>,模型阶数为 60,其中 LS 得到的模型记为 LS-CHAMP,抗差估计得到的模型记为 RO-CHAMP,数据采样间隔为 30 s,这样共有约  $30 \times 2880 = 86400$  个观测历元,参数个数为 3717 个。为了验证应用抗差估计的有效性,我们在由 30 天数据得到的扰动位序列中随机挑选了 20 处卫星位置,模拟了 20 个( $5 \sim 100$ )  $\text{m}^2\text{s}^{-2}$  量级的异常误差。计算中非地球引力的保守力主要考虑日、月引力,固体潮、海潮和相对论效应等。采用不同重力场模型位系数差

的阶方差评定两种方法解算出的重力场模型精度,公式如下:

$$\sigma_l = \sqrt{\sum_{m=0}^l [(C_{lm} - \bar{C}_{lm})^2 + (S_{lm} - \bar{S}_{lm})^2]} \quad (14)$$

$$l = 2, 3, \dots, 60$$

其中  $C_{lm}$  和  $S_{lm}$  为参考模型位系数,  $\bar{C}_{lm}$  和  $\bar{S}_{lm}$  为估计出的位系数,  $l$  和  $m$  为位系数的阶和次。

图 3 为 RO-CHAMP、LS-CHAMP、EIGEN2、

EIGEN1S 和 EGM96 模型与 EIGEN-CG03C 模型的位系数差的阶方差。EIGEN-CG03C 模型(2005 年最新公布)是由 CHAMP、GRACE 卫星观测数据加入地面重力数据获得的高精度 360 阶地球重力场模型,是目前国际上所公认的精度最高的地球重力场模型<sup>[13]</sup>。

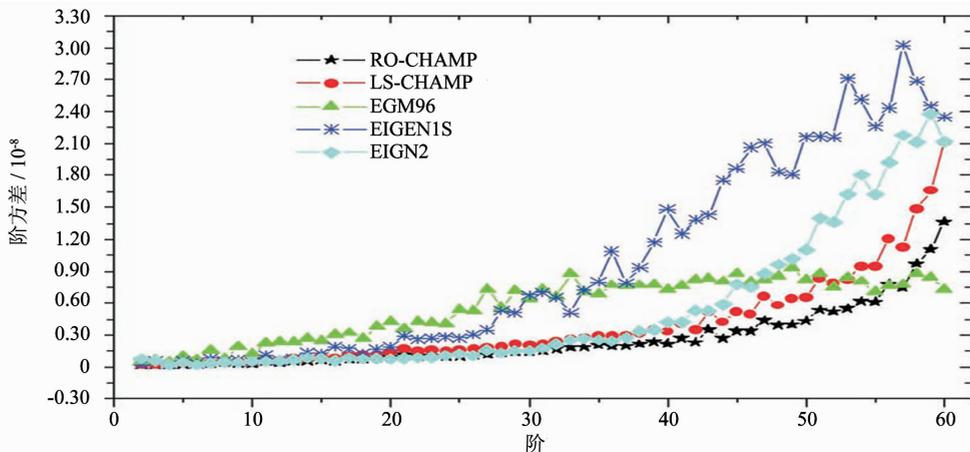


图 3 各重力场模型与 EIGEN - CG03C 模型位系数差的阶方差

Fig. 3 Degree variances between EIGEN-CG03C and RO-CHAMP, LS-CHAMP, EIGEN2, EIGEN1S, EGM96, respectively

为进一步验证 RO-CHAMP、LS-CHAMP 模型的可靠程度和精度,取前 30、40、50、60 阶位系数分别计算区域为:经度  $-150^\circ \sim 150^\circ$ , 纬度  $-60^\circ \sim 60^\circ$ , 间隔为  $1^\circ$  的网格点的大地水准面高,这样共有 36 421 个格网值,并与 EIGEN-CG03C 模型的计算值进行比较,结果见表 1。

从计算结果可以看出:

1) 从位系数阶方差来看,LS-CHAMP、RO-CHAMP 和 EIGEN2 模型的低阶位系数有很好的 consistency,但随着位系数阶数的增加,RO-CHAMP1S 模型的精度要优于 LS-CHAMP、EGM96、EIGEN1S、EIGEN2 模型,RO-CHAMP 模型与 EIGEN-CG03C 最为接近;

2) 从大地水准面差值来看,RO-CHAMP 模型与 EIGEN-CG03C 模型前 30、40、50、60 阶位系数获得的大地水准面高差值的标准偏差分别为 3.12 cm、6.11 cm、9.83 cm 和 21.32 cm,优于同阶次的 EGM96、EIGEN1S 模型。与 EIGEN2 模型比较显示,RO-CHAMP 前 30 阶与 EIGEN2 精度相当,而前 40、50、60 阶结果优于 EIGEN2;

3) 总体而言,RO-CHAMP 模型明显优于 LS-CHAMP 模型,这说明了异常误差对基于最小二乘解的 LS-CHAMP 结果影响严重,抗差解有效地控制了异常误差的不良影响。

表 1 各重力场模型与 EIGEN-CG03C 得到的大地水准面高度差值统计结果

Tab.1 The statistical results of geoid differences between EIGEN-CG03C and RO-CHAMP, LS-CHAMP, EIGEN2, EIGEN1S, EGM96, respectively

重力场模型	阶数	最大值 (cm)	最小值 (cm)	标准偏差 (cm)
LS-CHAMP	30	26.22	-19.49	5.36
	40	40.67	-39.42	8.79
	50	72.35	-75.82	15.27
RO-CHAMP	30	14.22	-17.15	3.12
	40	27.65	-22.55	6.11
	50	68.78	-64.57	9.83
EGM96	30	46.73	-41.50	11.25
	40	113.16	-103.77	16.57
	50	153.82	-155.50	22.20
EIGEN1S	30	199.62	-220.67	26.13
	40	40.78	-33.82	7.80
	50	95.67	-74.77	19.31
EIGEN2	30	217.02	-267.61	40.49
	40	566.53	-506.70	67.61
	50	10.56	-11.47	2.99
EIGEN2	40	28.67	-23.18	6.59
	50	108.96	-105.59	17.66
	60	431.84	-401.05	44.85

## 6 结论

目前基于能量守恒方程的 CHAMP 重力场恢复一般基于最小二乘解,当观测数据中存在异常值或粗差时,则不可避免地降低 CHAMP 重力场的整体精度和可靠性。本文将抗差估计引入到 CHAMP 重力场的恢复计算中,结果表明,由抗差估计得到的 CHAMP 重力场精度优于 LS 方法得到的模型精度。采用抗差估计进行 CHAMP 重力场恢复的缺点是由于需要进行循环迭代而耗时巨大,克服这一问题的有效办法是采用预条件的共轭梯度法,限于篇幅,作者将另文讨论。

**致谢** 感谢德国 GFZ 数据中心提供的 CHAMP 数据。

### 参 考 文 献

- 1 Han S C, et al. Efficient gravity field recovery using in situ disturbing potential observables from CHAMP[J]. *Geophys. Res. Letters*, 2002, 29(16): 1 789 - 1 794.
- 2 Howe E, et al. Analysis of one month of CHAMP state vector and accelerometer data for the recovery of the gravity potential[J]. *Advances in Geosciences*, 2003, 1: 1 - 4.
- 3 Gerlach C, et al. CHAMP field recovery using the energy balance approach[J]. *Advances in Geosciences*, 2003, 1: 73 - 80.
- 4 Gerlach C, et al. A CHAMP - only gravity field model from kinematical orbit using the energy integral[J]. *Geophysical Research Letters*, 2003, 30(20): 2 037 - 2 041.
- 5 徐天河 杨元喜. 利用 CHAMP 卫星几何法轨道恢复地球重力场模型[J]. *地球物理学报*. 2005, 48(2): 288 - 293.
- 5 Xu Tianhe and Yang Yuanxi. CHAMP gravity field recovery using kinematical orbits[J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2005, 48(2): 288 - 293. (in Chinese)
- 6 Howe E. CHAMP satellite gravity field determination by collocation[D]. Copenhagen, The University of Copenhagen, 2005.
- 7 徐天河,居向明. 用 Kaula 线性摄动方法恢复 CHAMP 重力场模型[J]. *大地测量与地球动力学*, 2006, 26(4): 18 - 21.
- 7 Xu Tianhe and Ju Xiangming. CHAMP gravity field recovery with Kaula linear perturbation method[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2006, 26(4): 18 - 21. (in Chinese)
- 8 徐天河,杨元喜. CHAMP 轨道及加速度计误差对恢复重力场的影响[J]. *大地测量与地球动力学*, 2005, 25(2): 75 - 81.
- 8 Xu Tianhe and Yang Yuanxi. Effect of orbit and accelerometer errors of CHAMP on recovery of gravity field[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2005, 25(2): 75 - 81. (in Chinese)
- 9 徐天河,杨元喜. CHAMP 卫星快速轨道(RSO)的使用及精度评定[J]. *大地测量与地球动力学*, 2004, 24(1): 81 - 84.
- 9 Xu Tianhe and Yang Yuanxi. Use and precision evaluation of CHAMP rapid science orbit[J]. *Journal of Geodesy and Geodynamics*, 2004, 24(1): 81 - 84. (in Chinese)
- 10 杨元喜. 抗差估计理论及应用[M]. 北京:八一出版社, 1993.
- 10 Yang Yuanxi. The theory and application of robust estimation[M]. Beijing: Bayi Publication House, 1993. (in Chinese)
- 11 Yang Yuanxi. Robust estimation for dependent observations[J]. *Manuscripta geodaetica*, 1994, 19: 10 - 17.
- 12 Yang Yuanxi, et al. Robust estimator for correlated observations based on bifactor equivalent weight[J]. *Journal of Geodesy*, 2002, 76: 353 - 358.
- 13 Förste C, et al. A new high resolution global gravity field model derived from combination of GRACE and CHAMP Mission and altimetry/gravimetry surface gravity data[C]. *EGU General Assembly 2005*, Vienna, Austria, 24 - 29, April 2005.