第32卷第3期
2012年6月

大地测量与地球动力学
JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS

Vol. 32 No. 3
June, 2012

文章编号:1671-5942(2012)03-0086-05

基于正交最小二乘多面函数构建局域海洋地磁场模型研究*

常宜峰　柴洪洲　王　敏
(解放军信息工程大学测绘学院,郑州　450052)

摘　要　针对多面函数拟合局域海洋地磁场模型中质量控制和节点选择问题,提出使用抗差估计与正交最小二乘原理相结合的方法。在质量控制过程中,将局部有显著起伏的采样点视为异常观测值,采用抗差估计减弱异常值点的不利影响。在节点选择中,使用基于正交最小二乘原则判断节点的贡献效力大小,按照此原则自适应地选择节点。结果表明,基于正交最小二乘原理的多面函数法的精度和稳定性更好,更适于构建局域海洋地磁场模型。

关键词　局域海洋地磁场模型;抗差估计;正交最小二乘原理;多面函数;节点
中图分类号:P207　　**文献标识码**:A

STUDY ON CONSTRUCTION OF LOCAL MARINE GEOMAGNETIC FIELD MODEL BASED ON ORTHOGONAL LEAST SQUARE MULTI-SURFACE FUNCTION

Chang Yifeng, Chai Hongzhou and Wang Min

(*Institute of Surveying and Mapping*, *Information Engineering University*, *Zhengzhou* 450052)

Abstract　Aim at the problem of quality control and node choice in modeling local marine geomagnetic field based on multi-surface function, a fitting method with combining robust trend surface and orthogonal least squares is proposed. In order to control the influence of some outstanding points to surface fitting, a robust fitting of the trend surface by using an equivalent weight is adopted and the adaptive node choosing method is proposed based on the effect of every node on the curve fitting calculated by using the orthogonal least squares as well. The results show that this method is more effective in accuracy and stability than normal method.

Key words: local marine geomagnetic field; robust estimate; orthogonal least square; multi-surface function; node

1　引言

地磁场在了解地球内部的物质分布和辅助导航中有重要用途,其中,地磁场模型起着非常重要的作用。常用的是泰勒多项式模型,优点是计算简单,但地磁数据存在较大跳变性,难以取得较高的精度。1971 年 Hardy 给出了多面函数拟合法,1976 年用于重力异常和大地水准面差距计算,1978 年用于地壳形变计算,2009 年赵建虎将此方法引入局域海洋地磁场建模中,并提出分区建模来提高精度[1]。多面函数是利用一些规则的数学曲面来逼近实际曲面,从而获得较高的精度。本文提出将抗差估计与正交最小二乘相结合来拟合局域海洋地磁场模型。

对于多面函数模型,核函数的选择和节点的确定至关重要。对于核函数,已有学者进行过深入研究。正双曲面函数构建的模型在检查点上的误差分

* **收稿日期**:2011-11-09
作者简介:常宜峰,男,1986 年生,硕士研究生,主要从事测量数据处理理论与方法研究. E-mail:changyifeng1986@163.com

布和精度统计参数均优于倒双曲面函数,并且正双曲面核函数构造的模型精度随平滑因子的变化平缓而相对稳定,倒双曲面函数构造的模型精度变化剧烈且最优平滑因子相对较大,而过大的平滑因子可能造成局部模型失真,尤其对于地磁变化相对较大的数据的拟合,在此取正双曲面函数,平滑因子取 0.1[1]。对于节点的选择,通常是直接取采样点,可是选择节点不同产生的结果也不同,具有一定的随意性。由于每个节点对拟合结果贡献是不同的,有学者采用 t 检验或逐步回归的方法来选择节点,得到的效果较好[2]。本文利用正交最小二乘原理的基本思想,首先将误差方程系数正交化,并计算观测向量与正交化向量之间的夹角,节点对曲面拟合的贡献就用夹角的大小来表示。按照这种原则方法依次选择合适的节点,完成自主选择节点的目的[3]。此方法的优点是既保证了拟合的精度又兼顾了拟合的稳定性。

2　基于抗差估计的质量控制

在测量过程中受到各种因素的影响,可能出现异常观测数据,一般的质量控制是采用判断测量值与对应趋势面拟合值之间差值大小的趋势面法来进行的。趋势面分析方法是将短尺度的、局部的变化看作随机的和非结构的噪声,因此当局部区域变化比较剧烈时,可将其视作异常观测。但是单纯的趋势面拟合并不具备抗差的能力,故本文引入抗差估计理论[4,5],采用抗差趋势面法进行质量控制。

趋势面函数如下式所示

$$\hat{z}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\alpha_{ij}x^{i}y^{j} \tag{1}$$

其中,$\alpha_{ij}(i=0,\cdots,n,j=0,\cdots,n)$ 为待求系数,(x,y) 为观测点坐标,$\hat{z}$ 为对应的磁力观测值。如果有 m 个观测点,应用最小二乘准则即可解得多项式系数。

设有误差方程

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{l} \tag{2}$$

根据抗差估计理论,以及等价权理论可得

$$\hat{\boldsymbol{X}}^{(k+1)}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}^{(k)}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{P}}^{(k)}\boldsymbol{Z} \tag{3}$$

其中,等价权为 $\bar{p}^{(k)}$,利用 IGGⅢ权函数确定:

$$\bar{p}_i^{(k)}=\begin{cases}1 & |v_i'^k|\leqslant k_0\\ \dfrac{k_0}{|v_i'^k|}\left[\dfrac{k_1-|v_i'^k|}{k_1-k_0}\right]^2 & k_0<|v_i'^k|\leqslant k_1\\ 0 & |v_i'^k|>k_1\end{cases} \tag{4}$$

式中残差 $v_i'^k=v_i^k/\hat{\sigma}_i^{(k)}$;取 $\hat{\sigma}_i^{(k)}=\mathrm{med}\{|v_i^k|\}/0.6745$;$k_0$ 和 k_1 分别取 1.0 ~ 2.0 和 2.5 ~ 4.0,根据磁力异常变化情况作相应调整。实验发现,在地磁异常变化比较剧烈的区域可以适当的将 k_0 和 k_1 取值变小,在变化比较平缓的区域则可适当将取值变大。

利用该模型计算均方差 σ 和测量值处的估值,并计算两者的偏差来判断测量值 z_i 是否异常:$|z_i-\hat{z}(x_i,y_i)|$是否大于 3σ,如果大于则标定为异常值,并剔除;否则就接受。其中,均方差 $\sigma=\sqrt{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{PV}/(m-n-1)}$。

3　基于正交最小二乘法节点选择

经过质量控制后,再对剩下的残差进行拟合。根据多面函数原理有,

$$z(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\beta_i Q(x,y,x_i,y_i) \tag{5}$$

其中,n 为节点个数,(x_i,y_i) 为节点坐标,β_i 为模型系数,$Q(x,y,x_i,y_i)$ 为二次核函数,一般取正双曲函数(如下式),δ^2 为模型的平滑因子(本文取 0.1)。

$$Q(x,y,x_i,y_i)=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+\delta^2} \tag{6}$$

在已知有限测量数据的情况下求解方程,重要的是节点的选择,一般情况下直接取均匀分布在研究区域内的观测点,如果选择所有的采样点作为节点,可能会出现内符合精度虚高,推估和内插精度无法保证的情况。特别在采样点受异常误差污染时,拟合精度会更低。为解决以上问题,本文在此引入基于正交最小二乘原理的思想来建立一种自主选择节点的方法。

在 m 个磁力数据中选择 n 个数据建模,即

$$\boldsymbol{Z}_{m\times 1}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{X}_{n\times 1} \tag{7}$$

其中,$\boldsymbol{X}$ 为模型系数,$\boldsymbol{A}$ 为核函数矩阵,由最小二乘原理得,

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} \tag{8}$$

模型精度评价指标为[6]

$$RMS=\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m-n}(Z_j^m-Z_j)^2}{m-n-1}} \tag{9}$$

先假设选取所有的采样点为节点,即 $m=n$,此时构建的误差方程系数阵为

$$\boldsymbol{A}=[a_1\ a_2\cdots a_m]\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm}\end{bmatrix} \tag{10}$$

其中,

$$a_i=[a_{1i}\ a_{2i}\cdots a_{mi}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}Q_{1i}(x_1,y_1,x_i,y_i)\\ Q_{2i}(x_2,y_2,x_i,y_i)\\ \vdots\\ Q_{mi}(x_n,y_n,x_i,y_i)\end{bmatrix},i=1,2,\cdots,m \tag{11}$$

从式(11)可以看出,每个 a_i 对求系数 β 的决定效力是有差别的,即每一节点对函数拟合的影响是不同的,故提供了一种评价准则,便于依照节点贡献效力的大小来选择节点。

下面就引入一种表示节点贡献大小的原则,将式(5)表示成向量形式,

$$Z=\sum_{k=1}^{m}\beta_k a_k \tag{12}$$

假设 a_k 之间是相互正交的,则左乘 $\beta_k a_k^{\mathrm{T}}$ 有,

$$\beta_k a_k^{\mathrm{T}} Z=\beta_k(\beta_1 a_k^{\mathrm{T}} a_1+\cdots+\beta_k a_k^{\mathrm{T}}+\cdots+\beta_m a_m^{\mathrm{T}}) \tag{13}$$

两边求和并移项得

$$1=\frac{\sum_{k=1}^{m}\beta_k^2\|a_k\|^2}{Z^{\mathrm{T}}Z} \tag{14}$$

定义 η 为选择 $t(t\leqslant m)$ 个节点的列向量时的总贡献

$$\eta=\frac{\sum_{k=1}^{t}\beta_k^2\|a_k\|^2}{Z^{\mathrm{T}}Z} \tag{15}$$

η 的值在 0 到 1 之间。并且当 t 越大,η 就越大,表明逼近程度越高;当 $t=m$ 时,$\eta=1$,此时选择了所有的采样点,拟合误差为零,逼近精度最高。但由于没有多余观测,可靠性较差,为此应根据每个基矢量的贡献大小来选择若干节点,使 η 足够大且有多余观测。

要想使 η 最大,即需使 β_k 取最大值,在式(12)两边同时左乘 a_k^{T},可得

$$\beta_k=\frac{a_k^{\mathrm{T}}Z}{a_k^{\mathrm{T}}a_k}\quad(k=1,\cdots,t) \tag{16}$$

显然,要使 β_k 取得最大值,需向量 a_k 与观测向量 Z 之间的夹角 θ_{a_kZ} 最大,即

$$\theta_{a_kZ}=\frac{Z^{\mathrm{T}}a_k}{\|Z\|\ \|a_k\|} \tag{17}$$

其具体计算步骤为:

1)将所有的采样点视为剩余节点,计算系数阵 $\boldsymbol{A}$,m 个列向量可记为 $a_1,a_2,\cdots,a_m$;

2)计算 Z 与 a_k 之间的夹角,求得最大值

$$\theta_{a_kZ}=\max(\theta_{a_kZ})\quad(k=1,2,\cdots,m) \tag{18}$$

式(18)表明 a_j 对 Z 的贡献最大,于是可将与 a_j 相对应的坐标(x_j,y_j)选为节点。

3)按照最小二乘原理解算系数 β

$$\boldsymbol{\beta}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z} \tag{19}$$

其中,$\boldsymbol{A}=[a_j]$,计算残差 $\boldsymbol{V}$,视其是否满足所设定的精度要求,若满足精度要求,终止计算;否则对剩余的 $n-1$ 个向量作施密特正交化,使之正交于 a_j,得到 $a_1^2,a_2^2,\cdots,a_{n-1}^2$。

4)重复步骤 2)~3),每次都可以找出一个新的 a_j,分别记为 $a_j^2,a_j^3,\cdots,a_j^p$,并将其依次加入到 $\boldsymbol{A}$ 矩阵中,即更新 $\boldsymbol{A}=[a_j\ a_j^2\ a_j^3\cdots\ a_j^p]$,直到找出 p 个节点,并能保证满足精度要求为止。

4 实验分析

为验证以上所述方法在局域海洋地磁场模型建立中的有效性,采用某测区海洋磁力测量的数据进行计算和分析。该测区定位系统采用 NGD-60 型差分 GPS 定位系统,船载磁力仪采用美国 Geometrics 公司的 G-881 型海洋磁力仪,共有 1 681 个测量数据。经过了各项的改正,测区的等值线如图 1 所示。均匀选取其中的 441 个数据作为已知的测量点,将剩余的测量数据作为外部的检核点,分别使用多面函数法、正交最小二乘多面函数法、基于抗差趋势面的多面函数法和基于抗差趋势面的正交最小二乘多面函数法,4 种方法进行计算(表 1,其中最大值和最小值是指模型计算结果与实测值的偏离的最大和最小值,平均值是所有偏离量的算数平均值,均方误差是对外部检核点的综合评价指标)。

从表 1 可以看出,直接使用多面函数和正交多面函数进行拟合,均方误差分别可达17 nT和15 nT,

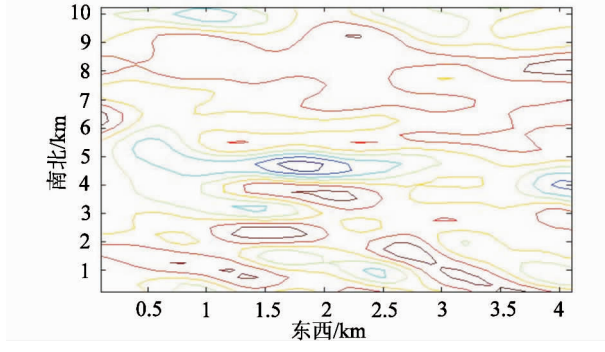


图 1 某测区磁力异常分布

Fig. 1 Distribution of magnetic abnormity in the studied area

表 1 不同拟合方法的结果比较(单位:nT)

Tab. 1 Comparison among results with different methods (unit:nT)

组合方法	最大值	最小值	平均值	均方误差
多面函数	50.872 4	-39.614 5	0.652 3	17.428 2
正交多面函数	52.955 2	-37.395 3	0.660 5	15.449 8
基于抗差趋势面的多面函数	15.979 8	-42.965 5	-8.411 4	12.132 0
基于抗差趋势面的正交多面函数	32.235 3	-25.544 7	0.277 1	7.511 8

平均值都在 0.6 nT 左右,说明模型的集中程度较好,两者所得到的精度基本相当,但正交多面函数法略好于多面函数法,并且都有所偏大。加上抗差估计趋势面进行质量控制之后,同样比较两种方法的计算结果,均方误差分别为 12 nT 和 7 nT,精度提高了 41%,平均值分别为 -8.4 nT 和 0.2 nT,基于抗差趋势面的多面函数出现了明显的系统偏差,分析原因是多面函数法对节点没有选择性,不是选择一些特征节点进行建模,而是将所有的节点作为建模节点,从而引入了一些系统误差,进而产生了系统性偏差。比较多面函数和基于抗差趋势面的多面函数,增加了抗差以后,精度由 17 nT 变为 12 nT;同样,对正交多面函数增加了抗差以后,精度由 15 nT 变为 7 nT,说明基于抗差趋势面的质量控制可以减小一部分不良影响。综合表明基于抗差趋势面的正交多面函数法总体上要优于以上其他 3 种方法。

图 2 和图 3 分别是使用基于抗差趋势面的正交多面函数法和基于抗差趋势面的多面函数法拟合的检验点的残差分布图,从图中可以看出,图 2 的残差分布相对更为集中,且普遍都靠近零点。

为进一步验证按照正交多面函数法选择节点的多少与所得模型拟合精度之间的关系,依次计算了选择个检验点时的均方误差,并将用正交多面函数选择的节点个数与拟合的均方误差的关系绘制成图 4。

从图 4 可以看出,随着选择的节点个数的增加,均方误差逐渐减少。在采用 250 个节点时,精度已经达到了 17 nT,基本上相当于选择所有节点进行多面函数法建模时的精度。随着选择节点个数的继续增加,精度基本保持稳定并有所提高。同时应该指出,针对地磁变化比较复杂和比较平缓的两种区域,数据的代表性对于模型的精度有着重要的影响。因此,在变化比较复杂的区域可以适当的放宽迭代停止的判断条件,尽可能多的自主选择特征点进行建模。

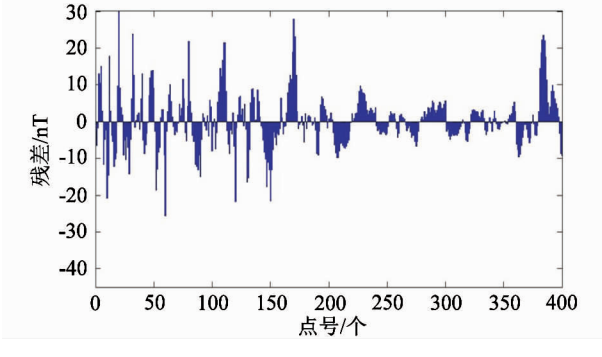


图 2　基于抗差趋势面的正交多面函数法拟合残差

Fig. 2　Fitting residual with orthogonal multi-function method based on robust trend-surface

为了使计算结果更直观,用正交多面函数法和一般多面函数法分别计算了整个区域的网格点地磁场总强度值,并利用计算所得数据分别绘制正交多面函数法和普通多面函数法磁力异常图,与该区域实际磁力异常场图进行比较。图 5(a)是原始的磁力异常分布图,(b)是使用基于抗差趋势面的正交多面函数法得到的拟合图,(c)是使用基于抗差趋势面的多面函数法得到的结果。从图中可以看出,

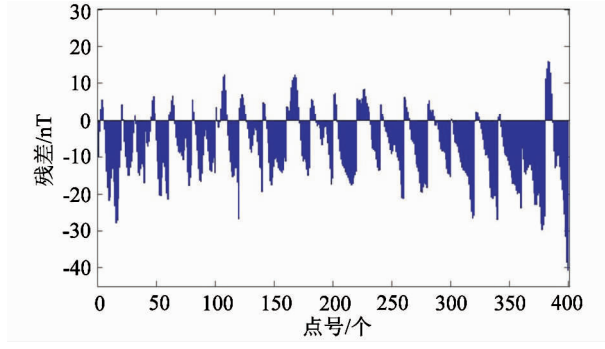


图 3　基于抗差趋势面的多面函数法拟合残差

Fig. 3　Fitting residual with multi-function method based on robust trend-surface

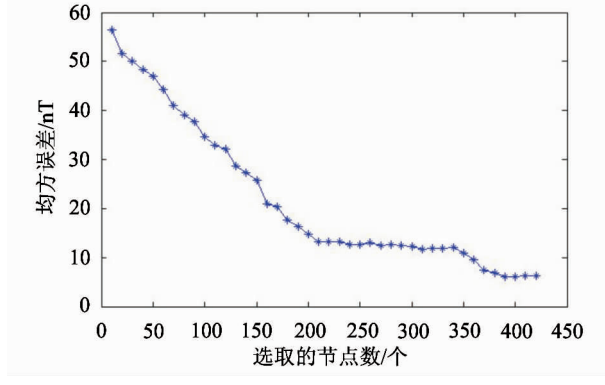


图 4　节点选择与拟合误差关系

Fig. 4　Relation between node collecting and error fitting

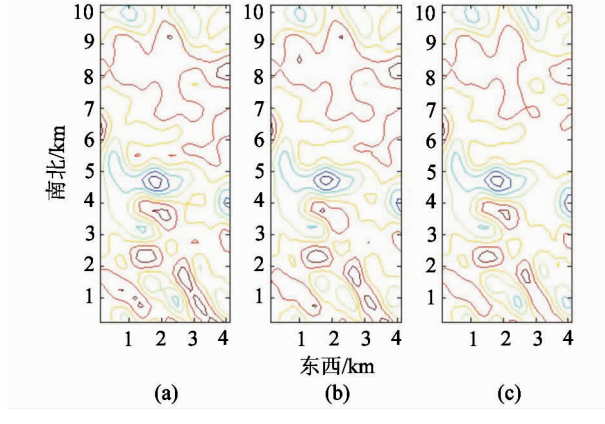


图 5　两种方法拟合效果比较

Fig. 5　Comparion between fitting results with two methods

(下转第 93 页)