第28卷第1期
2008年2月

大地测量与地球动力学
JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS

Vol. 28 No. 1
Feb. ,2008

文章编号:1671-5942(2008)01-0109-06

附不等式约束的大地测量反演*

王乐洋　朱建军
(中南大学信息物理工程学院测绘与国土信息工程系,长沙　410083)

摘　要　解的非惟一性是大地测量地球物理反演的一个难题。利用不等式约束可以合理地表达各种先验信息的特点,给出利用先验信息处理反演解非惟一性问题的附不等式约束的大地测量反演理论,讨论利用该理论的关键问题和难点,提出该反演方法的分类和实施,并通过算例进行分析和验证。

关键词　大地测量反演; 先验信息; 不等式约束; 非惟一性; 算法
中图分类号:P227;O241　　**文献标识码**:A

GEODETIC INVERSION THEORY CONSTRAINED WITH INEQUALITY

Wang Leyang and Zhu Jianjun

(*Department of Surveying and Geomatics*, *School of Info-Physics and Geomatics Engineering*, *Central South University*, *Changsha*　410083)

Abstract　The un-uniqueness of estimated parameter is one of the problems in geodetic and geophysical inversion. Getting a best parameter is the research hot and difficulty in inversion problem. Prior information is very important to get the best parameter. The conventional method using the prior information is analysed. The inequality constrained geodetic inversion theory is given to solve the un-uniqueness problem with the prior information. The advantages, key point and difficulty of this theory are discussed. The realization and classification method for this theory are given. Through an example this theory is analized.

Key words: geodetic inversion; prior information; inequality constraints; un-uniqueness; algorithm

1　引言

由于地球物理场的等效性和大地测量观测资料的局限性,大地测量反演解的非惟一性是反演不可避免的问题,同时能否求得问题的最优解又是关系到反演结果能否成功进行相关地学解释的关键,因此当今反演问题研究的热点和难点就是如何求得反演问题的最优解。

充分利用地球物理和大地测量等地学先验信息是解决大地测量地球物理反演中解非惟一性的有效途径。传统的先验信息利用方法可以得到反演问题的加权最小二乘解、加权最小范数解和加权阻尼最小二乘解,也可以将先验信息表示成等式或不等式约束的情形来利用。由于科学技术的发展,大地测量和地球物理观测的手段越来越多,观测资料的积累也越来越多,对任意观测目标或对象的物理、力学性质的了解也越来越充分,根据先验信息建立约束的可能性也就越来越大,而不等式约束可以相对可靠地描述各种先验信息。附不等式约束的大地测量反演或者地球物理反演问题在国内外都研究得比较

* **收稿日期**:2007-07-29
基金项目:国家自然科学基金(40574003);中南大学研究生教育创新工程(1343-77314);教育部博士点基金(20050533057);武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室开放基金(905152533-05-01)
作者简介:王乐洋,男,1983年生,硕士生,主要从事现代测量数据处理的学习和研究. E-mail:wleyang@163.com

少,因此该理论有很大的研究和应用价值[1]。本文主要讨论提出附不等式约束的大地测量反演理论的科学技术发展的有利条件,理论的关键问题、难点、分类、实施方法和应用前景,目的是建立一套完整的附不等式约束的大地测量反演理论,来解决相关的地球科学问题。

2 传统先验信息的应用[2-6]

2.1 模型构置中加权函数的应用

在模型构置时,既可以对预测误差加权,也可以对模型参数加权。

在地球物理资料反演中,加权函数或加权矩阵得到了普遍的应用,常用的 3 种有"加权"解:

1)加权最小二乘解

如果方程 $Gm = d$ 是完全超定的,则可以通过使广义预测误差 $E = e^{\mathrm{T}}W_e e$ 极小来估计模型参数。由此得到的解为

$$m^{\mathrm{est}} = (G^{\mathrm{T}}\mathrm{W}_{\mathrm{e}}\mathrm{G})^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}}W_e d \tag{1}$$

2)加权最小范数解

如果方程 $Gm = d$ 是完全欠定的,则可通过选取最简单的解来估计模型参数,其中的简单性由广义长度 $L = (m - <\boldsymbol{m}>)^{\mathrm{T}}W_m(m - <\boldsymbol{m}>)$ 确定。由此所得解为

$$m^{\mathrm{est}} = <\boldsymbol{m}> + W_m G^{\mathrm{T}}(GW_m G^{\mathrm{T}})^{-1}(d - G<\boldsymbol{m}>) \tag{2}$$

式中 $<\boldsymbol{m}>$ 是选择的先验模型向量。

3)加权阻尼最小二乘解

如果方程 $Gm = d$ 是稍微欠定的,则能通过使预测误差和解长度的组合 $E + \varepsilon^2 L$ 极小来求解。由尝试法来选取参数 ε,使产生的解具有适当小的预测误差。因而解的估计值为

$$m^{\mathrm{est}} = <\boldsymbol{m}> + (G^{\mathrm{T}}W_e G + \varepsilon^2 W_m)^{-1}G^{\mathrm{T}}W_e(d - G<\boldsymbol{m}>) \tag{3}$$

它等价于

$$m^{\mathrm{est}} = <\boldsymbol{m}> + W_m G^{\mathrm{T}}(GW_m G^{\mathrm{T}} + \varepsilon^2 W_e)^{-1}(d - G<\boldsymbol{m}>) \tag{4}$$

2.2 等式约束的先验信息

2.2.1 模型参数的某一函数等于一个常数

例如具有线性等式约束 $Fm = h$。经常出现的一类问题是,在最小二乘意义下,同时在模型参数之间有 $Fm = h$ 形式的线性关系得到精确满足的先验约束下,求解反问题 $Gm = d$。实现这一约束的方法有如下两种。

1)把约束方程也包含在 $Gm = d$ 中,使其每一约束方程成为 $Gm = d$ 的一行,然后调整加权矩阵 $\boldsymbol{W}_e$,使这些约束方程与其他方程相比具有无限大的权。然而要使这些约束的预测误差等于零,就得增加其他方程的预测误差。

2)实现这类约束的方法是拉格朗日乘子法。通过建立函数

$$\boldsymbol{\Phi}(m) = \sum_{i=1}^{M}(\sum_{j=1}^{N}G_{ij}m_j)^2 + 2\sum_{i=1}^{p}\lambda_i(\sum_{j=1}^{N}F_{ij}m_j - h) \tag{5}$$

在约束 $Fm = h$ 下使 $E = e^{\mathrm{T}}e$ 极小,然后令 $\boldsymbol{\Phi}(m)$ 对模型参数的偏导数等于零,得到

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(m)}{\partial m_q} = 2\sum_{j=1}^{N}m_j\sum_{i=1}^{M}G_{iq}G_{ij} - 2\sum_{i=1}^{M}G_{iq}d_i + 2\sum_{i=1}^{p}\lambda_i F_{iq} = 0 \tag{6}$$

必须把这些方程同约束方程 $Fm = h$ 联立才能求解得到估计的解。用矩阵的形式表示,方程为

$$\begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}} & F^{\mathrm{T}} \\ F & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G^{\mathrm{T}}d \\ h \end{bmatrix} \tag{7}$$

虽然可以对方程进行运算得到 m^{est} 的隐型表达式,但是若再乘以方阵的逆来直接解这 $N + p$ 个线性方程组,以求得 N 个模型参数估计值和 p 个拉格朗日乘子则常常更为方便。

2.2.2 模型参数具有一定的范围

另一个模型先验信息的类型涉及到模型参数具有一给定的符号,或者位于某一给定的区间的期望。

例如,假定模型参数代表地球中不同点处的密度。甚至不做任何测量,便能肯定密度处处大于零,因为密度是固有的正值。此外因为可以合理地假设地球内部是由岩石组成的,所以其密度值必定在表示岩石特征的某一已知范围内,比方说在 1 ~ 100 g/cm^{3}之间。如果在处理该反演问题时能利用这一先验信息,就可以大大缩小可能解的范围,甚至得到惟一解。

在这种情况下,先验信息的表示通常为

$$m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \tag{8}$$

地质勘探以及地震波探测技术能够对地表浅层的物质分布提供越来越精确的信息,国际上已建成数字地壳模型,如 CRUST-2[7]。

2.3 线性不等式约束

先验信息以线性不等式 $Fm \geqslant h$ 形式体现,对于不等式可以一部分一部分地进行解释。这一类型的先验约束用于其中的模型参数为固有的正值,即 $m_i \geqslant 0$ 的问题,也用于已知角拥有某种边界时的一些其他情况,例如某边坡的断层滑动时,根据已有的地质力学信息可以大致判断出该断层滑动的方向为东南方向,所以可以得到该角的边界条件是 225°方向。对于超定问题,可以在给定的不等式约束下使误差极小,从而得到反演问题的解。先验不等式约束可以用于欠定问题,找出求解 $Gm = d$ 和 $Fm \geqslant h$

的最小解。

对于线性不等式约束,反演问题一般可演变成一个线性规划问题,一般采用 L_1 范数求解。

3　附不等式约束的大地测量反演

在地球物理大地测量反演中,出现了很多有效的算法[2,8-23]。大地测量反演实际上是一种最优化问题。附有不等式约束的最优化计算问题具体来说是一个二次规划问题。目前,该问题在运筹学领域研究得比较成熟,提出了许多有针对性的算法[21]如:单纯形解法、Hilddreth-d'Esopo 方法和 Theil-van de panne 方法等。然而最优化计算主要是强调解的计算方法,其缺点是并不关注解的统计性质,甚至不关注解的计算精度,它不是寻找某些客观参数的估计值,而是寻找问题的解决方案,所以与大地测量数据处理中的平差及数理统计中的参数估计有一定差异。

在大地测量中存在很多不等式约束,例如,在方差估计中,已知方差大于 0。但 Helmert 方差估计法,MINIQUE 方差估计方法等各种方法都不能考虑这一个不等式约束,因而只能丢弃这一非常有用的信息,结果可能造成负方差、计算不收敛或无解(Forstner 方法)。

3.1　不等式约束实施方法

3.1.1　在线性约束情况下,先验信息的利用方法

1)直接附加在参数上,即根据先验信息,限定参数估计的上界和下界,可以表示为

$$m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \tag{9}$$

从而在反演时结合建立的反演模型 $Gm = d$,可以得到附不等式约束的反演模型为

$$\left.\begin{aligned} &Gm = d \\ &m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

2)部分不等式约束直接附加在参数上,另外的不等式约束建立在含有参数的不等式函数关系模型中,其反演模型为

$$\left.\begin{aligned} &G_1 m = d \\ &G_2 m \leqslant c \\ &m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

当建立的不等式约束函数模型为 $G_2 m \geqslant c$ 时,可以在该式的两边都乘以 -1,则可以变为 $G_3 m \leqslant c$,即可得到上面的模型。当然在某些先验信息的条件下可以得到这样的不等式约束的模型 $k_1 \leqslant G_4 m \leqslant k_2$,即 $G_4 m \leqslant k_2$ 和 $G_4 m \geqslant k_1$,经过变形后可以的得到 $G_4 m \leqslant k_2$ 和 $G_5 m \leqslant k_3$,合并后即为 $G_2 m \leqslant c$ 的形式了。

3)全部都是建立在含有参数的不等式约束函数模型中,其反演模型为

$$\left.\begin{aligned} &Gm = d \\ &Cm \leqslant W \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

3.1.2　不等式约束和反演模型均为非线性函数

对应于上述 3 种情况的附不等式约束的大地测量反演模型分别为

$$\left.\begin{aligned} &f(m) = d \\ &m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned} &f_1(m) = d \\ &f_2(m) \leqslant c \\ &m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &f(m) = d \\ &g(m) \leqslant W \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

3.1.3　反演模型为线性,不等式约束为非线性函数

对应于上述后两种情况的约束分别有(第一种情况不变)

$$\left.\begin{aligned} &Gm = d \\ &f(m) \leqslant c \\ &m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned} &Gm = d \\ &g(m) \leqslant W \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

3.1.4　反演模型为非线性,不等式约束为线性函数

对应于上述后两种情况的约束分别有(第一种情况不变)

$$\left.\begin{aligned} &f(m) = d \\ &Gm \leqslant c \\ &m_{\min} \leqslant m \leqslant m_{\max} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned} &f(m) = d \\ &Gm \leqslant W \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

对于式(9)~(15)所示的情况称为附不等式约束的单一型大地测量反演;对于式(16)~(19)中的反演称为附不等式约束的混合型大地测量反演。

3.2　附不等式约束的大地测量反演的分类

1)根据先验信息不等式约束和反演函数模型的线性或非线性分类,可以分为附不等式约束的单一型大地测量反演和附不等式约束的混合型大地测量反演两大类。

2)根据所用观测数据的情况可以分为附不等式约束的纯大地测量反演和附不等式约束的混合大地测量反演两大类。

4　算例及分析

4.1　算例

设某一大地测量反演问题建立的线性反演模型为 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Bx} - \boldsymbol{l}$,在该模型中 $\boldsymbol{x}$ 为待反演的模型参数

(某滑坡的几何变化信息),包括 4 个分量 $\boldsymbol{x}_1$(长度),$\boldsymbol{x}_2$(宽度),$\boldsymbol{x}_3$(深度)和 $\boldsymbol{x}_4$(倾斜),所附加的线性不等式约束为 $G\boldsymbol{x}\leqslant W$,同时由监测得到参数的变化范围是 $-0.2\leqslant\boldsymbol{x}_i\leqslant 2(i=1,2,3,4)$,反演参数的真值为 $\boldsymbol{x}=[-0.07\quad -0.20\quad 0.20\quad 0.37]'$。具体的原始数据见表 1 和表 2。

表 1 原始观测数据表

Tab. 1 Oreginal observations

B			l		P					
0.960 0	0.750 2	0.632 0	0.435 6	0.065 8	1	0	0	0	0	0
0.640 3	0.472 8	0.850 6	0.926 5	0.357 8	0	1	0	0	0	0
0.616 7	0.250 1	0.867 9	0.980 7	0.825 6	0	0	1	0	0	0
0.540 8	0.842 1	0.823 7	0.430 5	0.010 6	0	0	0	1	0	0
0.900 6	0.456 2	0.198 5	0.913 6	0.156 9	0	0	0	0	0	1

表 2 不等式约束数据表

Tab. 2 Data of inequality constraints

G				W
0.234 7	0.289 6	0.863 7	0.510 3	0.563 8
0.200 5	0.198 2	0.465 2	0.463 5	0.213 5
0.681 9	0.612 8	0.016 5	0.962 5	0.854 0

对于该反演问题,分别实施了 4 种反演方案:1)无约束反演;2)附加不等式 $G\boldsymbol{x}\leqslant W$ 约束反演;3)附加不等式 $-0.2\leqslant\boldsymbol{x}_i\leqslant 2(i=1,2,3,4)$ 约束反演;4)同时附加不等式 $G\boldsymbol{x}\leqslant W$ 和 $-0.2\leqslant\boldsymbol{x}_i\leqslant 2$ 约束反演。反演结果见表 3。

表 3 模型参数 X 反演结果表

Tab. 3 Inversion results of model parameter X

方案 1	方案 2	方案 3	方案 4	真值
0.400 4	0.182 5	−0.200 0	−0.068 9	−0.07
−1.087 9	−0.574 4	−0.200 0	−0.200 0	−0.20
0.726 4	0.416 0	0.292 4	0.210 9	0.20
0.136 9	0.209 8	0.465 2	0.364 3	0.37

4.2 分析

经过反演计算可以看出:

1)在所建立的先验信息不等式正确的情况下,充分利用附加不等式约束的反演结果(方案 4)更接近真实结果;

2)在上述 4 种方案的反演计算中,由于方案 2 和 3 没有充分利用所有的先验信息(不等式约束),所以反演结果比方案 4 稍差;

3)由于现在还没有较好的评定附不等式约束反演的方法,单从反演得到的协因数阵上看,方案 4 协因数阵的迹(9.4207)远小于不加任何约束的方案 1(29.465 0);

4)虽然不加任何约束的经典大地测量反演结果是在最小二乘情况下得到的,具有无偏性、有效性和一致性,但是在实际的反演问题中,在这种情况下得到的“最优解”,并不符合实际的要求,如先验信息(密度、变形量大小等)的约束,所以并不是真正意义上的最优解。

4.3 附不等式约束大地测量反演理论的应用前景

1)充分利用了多种观测资料,结合对观测目标或对象的物理、力学性质的了解建立不等式约束,理论上可以有效解决大地测量反演问题解的非惟一性问题;

2)对附不等式约束的大地测量反演模型尤其是非线性模型的求解,需要更多有效的算法作支撑;

3)该理论具有广阔的应用前景,可以用于联合大地测量资料、断层资料和地震矩张量反演地壳运动速度场;联合变形、地震、地质资料反演研究地壳应变 - 应力场、应变能密度场;利用 GPS、水准、重力资料反演研究活动断裂模式;联合卫星测高、声纳测深及海洋激光雷达遥感信息反演海洋环境参量;联合 INSAR、GPS 和水准资料反演地壳运动;联合各种观测数据反演研究地球内部构造等具有多角度、多种数据源和多种先验信息的大地测量反演问题中;

4)该理论的关键问题是:先验信息的收集、不等式方程的建立、附不等式约束反演模型的求解方法(线性与非线性算法)以及反演的精度评定与解释;

5)该理论的优点是:可以提高反演速度、减小反演陷入局部极小值——对于非线性反演的线性化方法来说,故是解决反演问题解非惟一性的有效方法;

6)该理论应用的难点是反演模型的建立、有效的快速算法以及可靠的精度评定方法等。

5　结语

1)大地测量反演在解决人类面临的资源短缺、自然灾害和生态环境退化问题显示出越来越重要的作用和地位。解的非惟一性问题是大地测量反演中普遍存在和不可避免的问题,如何获得反演问题的最优解是关系后续的反演结果能否成功用于地球科学解释的关键;

2)随着科学技术的发展,大地测量和地球物理观测的手段越来越多,观测资料的积累也越来越丰富,对任意观测目标或对象的物理、力学性质的了解也越来越充分,根据先验信息建立约束的可能性也就越来越大,而不等式约束可以相对可靠地描述各种先验信息;

3)附不等式约束的大地测量反演理论可以充分合理地利用各种先验信息,在联合反演以及各种有效算法的支撑下,可以很好地解决反演问题中解非惟一性的问题。

参　考　文　献

1　胡明城. 现代大地测量学的理论及其应用[M]. 北京:测绘出版社,2003.

1　Hu Mingcheng. The theory and application of contemporary geodesy[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press,2003. (in Chinese)

2　姚姚. 地球物理反演基本理论与应用方法[M]. 武汉:中国地质大学出版社,2002.

2　Yao Yao. The application method and basic theory of geophysical inversion[M]. Wuhan: The Publishing House of China University of Geosciences,2002. (in Chinese)

3　杨文采. 地球物理反演的理论与方法[M]. 北京:地质出版社,1997.

3　Yang Wencai. Theory and method of geophysical inversion[M]. Beijing: Geology Press,1997. (in Chinese)

4　傅淑芳,朱仁益. 地球物理反演问题[M]. 北京:地震出版社,1998.

4　Fu Shufang and Zhu Renyi. The problems of geophysical inversion[M]. Beijing: Seismological Press, 1998. (in Chinese)

5　许才军,申文斌,晁定波. 地球物理大地测量学原理与方法[M]. 武汉:武汉大学出版社,2006.

5　Xu Caijun, Shen Wenbin and Chao Dingbo. Geophysical geodesy principles and methods[M]. Wuhan: Wuhan University Press,2006. (in Chinese)

6　Menke W. Geophysical data analysis: discrete inverse theory[M]. New York:Academic Press,1984.

7　Bassin C, Laske G, et al. Eos Trans AGU,81: F897,2000.

8　党亚民,陈俊勇,晁定波. 大地测量反演解算中的遗传算法[A]. 大地测量学论文专集[C]. 北京:测绘出版社,1999.

8　Dang Yamin, Chen Junyong and Chao Dingbo. The genetic algorithm in geodetic inversion[A]. The geodesy thesis special[C]. Beijing: Surveying and Mapping Press,1999. (in Chinese)

9　党亚民,陈俊勇,晁定波. 模拟退火算法及其在大地测量反演中的应用[J]. 测绘科学,1999,1:8 - 14.

9　Dang Yamin, Chen Junyong and Chao Dingbo. Simulated annealing method and its application in geodetic inversion[J]. Science of Surveying and Mapping,1999,1:8 - 14. (in Chinese)

10　王健. 现代非线性优化算法在大地测量反演中的应用[D]. 武汉:中国科学院测量与地球物理研究所,2002.

10　Wang Jian. The application of modern nonlinear optimization algorithm in geodetic inversion[D]. Wuhan: Chinese Academy of Sciences Institute of Geodesy and Geophysics, 2002. (in Chinese)

11　魏超,朱培民,王家映. 量子退火反演的理论和实现[J]. 地球物理学报,2006,49(2):577 - 583.

11　Wei Chao, Zhu Peimin and Wang Jiaying. Quantum annealing inversion and its implementation[J]. Chinese Journal of Geophysics, 2006,49(2):577 - 583. (in Chinese)

12　张朝玉. 大地测量反演若干理论问题研究[D]. 武汉:武汉大学, 2006.

12　Zhang Chaoyu. Research on some theoretical problems of geodetic inversion[D]. Wuhan: Wuhan University, 2006. (in Chinese)

13　师学明,等. 一种新的地球物理反演方法——模拟原子跃迁反演法[J]. 地球物理学报,2007,50(1):305 - 312.

13　Shi Xueming, et al. A study on the simulated atomic transition algorithm for geophysical inversion[J]. Chinese Journal of Geophysics,2007,50(1):305 - 312. (in Chinese)

14　张丽琴. 同伦反演方法及在地震波阻抗反演中的应用[D]. 武汉:中国地质大学,2004.

14　Zhang Liqin. Homotopy method and the application to inversion of acoustic impedance[D]. Wuhan:China University of Geosciences,2004. (in Chinese)

15　李爽,许才军,王新洲. 论多种数据联合反演的模式及算法[J]. 大地测量与地球动力学,2002,22(3):78 - 82.

15　Li Shuang, Xu Caijun and Wang Xinzhou. Models and algorithms of joint inversion with various kind of data[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2002,22(3):78 - 82. (in Chinese)

16　Lu G, Krakiwsky EJ and Lachapelle G. Application of inequality constraint least squares to GPS navigation under selective availability[J]. Manuscripta Geodaetica, 1993,18: 124 - 130.

(下转第 126 页)