

卫星重力梯度恢复地球重力场的时域法研究*

邹正波^{1,2)} 罗志才^{3,4)} 邢乐林^{1,2)} 吴云龙³⁾ 李辉^{1,2)}

- (1) 中国地震局地震研究所, 武汉 430071
(2) 地壳运动与地球观测实验室, 武汉 430071
(3) 武汉大学测绘学院, 武汉 430079
(4) 辽宁工程技术大学地理空间信息技术与应用实验室, 阜新 123000

摘要 由于卫星重力梯度技术能够有效补偿重力场信号随卫星高度增加快速衰减的影响, 因此 GOCE 卫星的发射使得利用重力梯度测量数据恢复高精度重力场模型成为可能。以轨道摄动理论为基础, 利用时域最小二乘法, 分析重力梯度卫星的轨道高度、轨道倾角、卫星寿命(数据长度)、重力梯度测量精度以及数据采集频率等对其恢复地球重力场误差的影响。结果表明:时域最小二乘法适合于卫星重力梯度测量的误差分析和方案设计。

关键词 GOCE 卫星 地球重力场 卫星重力梯度 时域最小二乘法 误差分析

中图分类号:P228 文献标识码:A

TIME DOMAIN LEAST SQUARES METHOD FOR RECOVERING EARTH'S GRAVITY FIELD BY SATELLITE GRAVITY GRADIENT

Zou Zhengbo^{1,2)}, Luo Zhicai^{3,4)}, Xing Lelin^{1,2)}, Wu Yunlong³⁾ and Li Hui^{1,2)}

- (1) *Institute of Seismology, CEA, Wuhan 430071*
(2) *Crustal Movement Laboratory, Wuhan 430071*
(3) *School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079*
(4) *Geomatics and Applications Laboratory, Liaoning Technical University, Fuxin 123000*

Abstract Since the attenuation of the gravitaty field with altitude increasing can be sufficiently compensated by satellite gravity gradiometry, it is possible to recover earth's gravity field with higher precision. On the basis of the satellite orbit perturbation theory, the error of gravity field model from satellite gravity gradiometry mission is analyzed with the time-wise least square method. And the effects of gravity field on the accuracy are presented in maps, due to the choice of SGG parameters (such as satellite's altitude, sampling rates, inclination of satellite and accuracy of gradiometry). The results indicate that time domain least-square method is suitable for the error analysis and the mission design of the measurement of satellite gravity gradiometry.

Key words: GOCE mission, Earth's gravity field, satellite gravity gradiometry, time domain least squares method, error analysis

* 收稿日期:2007-01-31

基金项目:国家自然科学基金(40374006);辽宁工程技术大学地理空间信息技术与应用实验室开放基金

作者简介:邹正波,女,1979年生,硕士,主要从事卫星重力场研究。E-mail:zouz@126.com.

1 引言

地球重力场模型是地球最重要的物理特征之一,它反映地球内部物质分布、运动和变化状态,并制约着地球及其邻近空间发生的众多物理事件,因此研究地球重力场是地球科学的一项基础性任务。随着现代科技的发展,现有的地球重力场模型已经不能满足相关地学学科的需要,因此确定地球重力场的精细结构和全波段厘米级大地水准面成为当前物理大地测量学研究领域的热点问题^[1~4]。

继 CHAMP、GRACE 卫星之后,欧空局计划发射第三颗重力卫星——GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explore, GOCE), 该卫星(具体轨道参数如表 1 所示)采用近圆极轨道,轨道高度 250 km,有利于反映短波长高阶重力场信息,它不仅采用高-低卫星跟踪卫星技术,还增加了卫星重力梯度观测技术。由于卫星重力梯度对地球重力场的中、短波部分比较敏感,而卫星跟踪卫星则对中、长波部分比较敏感,因此预计 GOCE 可以恢复 250 阶地球重力场,相应大地水准面的精度可达到 1 cm,重力异常的精度达到 $(1 \sim 2) \times 10^{-5} \text{ ms}^{-2}$,空间分辨率优于 100 km(半波长)^[5]。同时,由于 GOCE 卫星直接通过卫星重力梯度仪测量出低轨卫星处重力位的二阶导数,因此 CHAMP、GRACE 所面临的重力场信号随高度增加快速衰减问题通过 SGG 观测可得到有效补偿^[6]。这一计划的实现将为大地测量学、地球物理学、地球动力学、海洋学等相关学科的发展提供更加精细的地球重力场信息^[2~4]。

表 1 GOCE 卫星的轨道参数

Tab. 1 Orbit parameters of GOCE mission

项目	内容
任务期	2 年
轨道	太阳同步黎明-黄昏轨道
地面站	瑞典基鲁纳:发送和接收
部件	ESOC:飞行控制
发射载体	火箭(1 000 kg 载荷 SSO)
预计	质量:~1 000 kg,电能需要:760 瓦
工作寿命	正常情况下 20 个月,可扩展到 30 个月
高度	约 250 km
倾角	96.5°(与太阳同步)
偏心率	<0.001(近似圆形)
白噪声	<3mE/Hz ^{1/2}

本文介绍了利用卫星梯度数据恢复地球重力场的时域最小二乘法的理论和算法,以 GOCE 卫星的轨道参数为参考,利用时域最小二乘法,分析了重力梯度卫星的轨道高度、轨道倾角、卫星寿命及重力梯

度测量精度、数据采样频率等对恢复地球重力场的影响。

2 原理和方法

重力梯度仪是 GOCE 上的核心部件之一,利用星载重力梯度仪可以直接测定卫星在轨处引力位二阶导数张量,以此来确定地球重力场。

目前计划在 GOCE 卫星上装载的梯度仪就是采用差分加速度测量原理的重力梯度仪设计,是一个三轴菱形结构,由 6 个加速度计组成,每个轴上分别有两个加速度计,重力梯度分量是由两个加速度之差来获得的^[7]。

早在 1986 年 Rummel 就阐述了重力梯度测量的理论基础,由于重力梯度张量就是某点重力位的二阶导数,因此每个梯度分量可以表示成^[6]:

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}, (x_i = x, y, z) \quad (1)$$

由于 ∇V 是无旋场,且在空气密度为零时(即地球外部没有质量),该张量的主对角线元素和为零,因此该张量 9 个元素中只有 5 个是独立的,重力梯度张量表示如下:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \quad (2)$$

在重力梯度张量分量中,对重力场贡献最大的是径向梯度分量,其次是沿速度方向以及垂直于速度方向的梯度分量,研究^①表明:GOCE 卫星上的梯度观测量在各方向大致满足 $V_{zz} \approx 2\ 800E$, $V_{xx} \approx V_{yy} \approx 1\ 400E$, $V_{xz} \approx 10E$, $V_{xy} \approx V_{yz} \approx 0$ 。因此本文将主要以主对角线上的 3 个分量为例进行讨论。

2.1 重力梯度分量的时域法

由卫星轨道摄动理论可知,扰动位可以表示成关于轨道根数的函数,而轨道根数是随时间变化的,因此扰动位可以用轨道根数及时间来表示。而重力梯度是重力位的二阶导数,故而亦可建立卫星重力梯度各分量与时间的函数关系^[8]。

现将所有的观测数据集认为是一个时间序列,即 SGG 数据点集合被看作是一个关于时间的函数,根据卫星轨道摄动理论,扰动位 T 在时域内可表示为^[9]:

$$V_{zz}(t) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^l \sum_{k=-l(2)}^l [A_{lmk}^{(zz)} \cos \psi_{lm}(t) + B_{lmk}^{(zz)} \sin \psi_{lm}(t)] \quad (3)$$

① <http://www.esa.int/esaLP/LPgoce.html>

$$\text{其中: } \begin{cases} \begin{Bmatrix} A_{lmk}^{zz} \\ B_{lmk}^{(zz)} \end{Bmatrix} = H_{lmk}^{(zz)} \begin{Bmatrix} \alpha_{lm} \\ \beta_{lm} \end{Bmatrix} \\ \psi_{km}(t) = k\bar{\omega}_o(t) + m\bar{\omega}_e(t) \\ \alpha_{lm} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{lm} \\ -\bar{S}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m, \text{even}}^{l-m, \text{even}} \quad , \beta_{lm} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{lm} \\ \bar{C}_{lm} \end{bmatrix}_{l-m, \text{even}}^{l-m, \text{even}} \\ H_{lmk}^{(zz)} = \Gamma_l(l+1)(l+2)\bar{F}_{lm}^k(I) \\ \Gamma_l = \frac{GM}{R^3} \left(\frac{R}{r} \right)^{l+3} \end{cases}$$

$\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}$ 是地球重力场模型的位系数 (待求参数); GM 为地球引力常数; R 为地球参考半径; r 是观测点半径; $\bar{\omega}_o = \bar{\omega} + M$ 为升交角距; $\bar{\omega}_e = \Omega - S_c$ 为地球的旋转辐角; l, m 分别为位系数对应的阶和次; L 是位系数的最大阶数; k 为建立轨道频率与重力频率之间关系的因子; $\bar{F}_{lm}^k(I)$ 为规格化倾角函数。

实际上对于非圆极轨道, 偏心率函数 $G(e)$ 应参

表 2 各重力梯度分量的时域表达式

Tab. 2 Time domain expressions of gravity gradient components

V_{ij}	$H_{lmk}^{(\dots)}$	$A_{lmk}^{(\dots)}$	$B_{lmk}^{(\dots)}$
xx	$-(l+1+k^2)\Gamma_l\bar{F}_{lm}^k$	$\alpha_{lm}H_{lmk}^{(xx)}$	$\beta_{lm}H_{lmk}^{(xx)}$
yy	$-((l+1)^2-k^2)\Gamma_l\bar{F}_{lm}^k$	$\alpha_{lm}H_{lmk}^{(yy)}$	$\beta_{lm}H_{lmk}^{(yy)}$
zz	$(l+1)(l+2)\Gamma_l\bar{F}_{lm}^k$	$\alpha_{lm}H_{lmk}^{(zz)}$	$\beta_{lm}H_{lmk}^{(zz)}$
xz	$-(l+2)\Gamma_l k\bar{F}_{lm}^k$	$\beta_{lm}H_{lmk}^{(xz)}$	$-\alpha_{lm}H_{lmk}^{(xz)}$
yz	$(l+2)\sin^{-1}\bar{\omega}_o\Gamma_l\bar{F}_{lm}^{k'}$	$\alpha_{lm}H_{lmk}^{(yz)}$	$\beta_{lm}H_{lmk}^{(yz)}$
xy	$-\sin^{-1}\bar{\omega}_o\Gamma_l\bar{F}_{lm}^{k'}$	$(\cot\bar{\omega}_o\alpha_{lm} - k\beta_{lm})H_{lmk}^{(xy)}$	$(k\alpha_{lm} + \cot\bar{\omega}_o\beta_{lm})H_{lmk}^{(xy)}$

2.2 时域最小二乘原理

根据以上分析, 可以建立卫星重力梯度张量、时间及地球重力场位系数之间的关系, 进而利用最小二乘原理恢复地球重力场。故而得到重力梯度与重力场位系数之间的关系:

$$\mathbf{V}_{ij} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \bar{\varepsilon} \quad (4)$$

\mathbf{V}_{ij} 为观测值 (梯度分量), 由一系列的坐标 $\bar{\omega}_o, \bar{\omega}_e$ 给出 (现假定倾角 i 为常数)。现将 \mathbf{V}_{ij} 看成一个向量, 而矩阵 \mathbf{A} 的每一分量均为相应 (l, m) 项关于 k 的求和, 即模型中的矩阵 \mathbf{A} 的每一个元素组成均为:

$$\sum_{k=-l(2)}^l H_{lmk}^{(ij)} \cos\psi_{km} \quad \text{或者} \quad \sum_{k=-l(2)}^l H_{lmk}^{(ij)} \sin\psi_{km}$$

利用最小二乘原理, 即 $\bar{\varepsilon}^T \mathbf{Q}_{ij}^{-1} \bar{\varepsilon}$ 最小, 可以得到待定参数的估值:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ij}^{-1} \mathbf{V}_{ij} \quad (5)$$

其中 $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_{ij}^{-1} \mathbf{A}$, 为法方程系数阵; \mathbf{Q}_{ij} 为方差-协方差阵。

2.3 误差阶方差分析

由时域最小二乘原理可知, 法方程系数阵 \mathbf{N} 的逆阵即为关于 (l, m) 的方差协方差阵, 而未知重力

与运算, 倾角随时间的变化因素也应考虑。研究表明: 通常卫星轨道偏心率不是很小时, 我们需要给出偏心率的一阶项^[10]。虽然这两项附加函数会使计算变得更加复杂, 但是在 GOCE 计划的配置中, 轨道偏心率 $e < 4 \times 10^{-3}$, 倾角变化 $|di| < 0.01^\circ$, 若干计算测试证明这两个函数对于计算的结果的影响十分微小, 可以在迭代计算过程中被轻易消除掉^[11], 因此本文将不考虑偏心率函数, 并将倾角看成常数处理。

同理, 可以得到其它几个重力梯度观测分量的时域表达式。由于重力梯度张量是一个对称量, 在空气密度为零的条件下, 该张量对角线元素之和为零, 因此只有 5 个独立分量, 表 2 足以描述所有梯度分量。

场位系数的先验方差阵可通过求解法方程系数阵 \mathbf{N} 的逆阵得到。因此可将误差阶方差表示为:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \sigma_{i0}^2(\bar{C}) + \sum_{m=1}^l \sigma_{lm}^2(\bar{C}) + \sigma_{lm}^2(\bar{S}) = \\ &\sigma_{i0}^2 + 2 \sum_{m=1}^l \sigma_{lm}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

其中 σ_{lm}^2 是法方程系数阵的逆阵中对应的 l 阶、 m 次的对角元素。因此时域最小二乘法恢复重力场模型的精度可以通过式 (6) 来评定。

3 计算结果与分析

由于重力梯度张量是由相互独立的 5 个分量组成, 且对重力场贡献最大的是径向梯度分量, 其次是速度方向以及垂直于速度方向的梯度分量, 本文将主要采用这 3 个分量来对时域最小二乘算法的误差做出比较和评估。

为了简化计算, 需进行如下假设^[6]: 1) 轨道是圆的; 2) 数据严格按照轨道规律分布; 3) 任务时间长度必须是整数, 即整圈数和整天数; 4) 任务期间无数据间隔; 5) 不包括非引力效应; 6) 测量协方差阵 \mathbf{Q} 为某一个尺度下的单位阵; 7) 卫星重力梯度数

据在全球范围规律分布。

本文基于利用卫星重力梯度的时域最小二乘法理论,以 GOCE 卫星的轨道参数为参考,调整某一轨道参数,重点分析梯度卫星的轨道高度、轨道倾角、卫星寿命(数据长度)、重力梯度测量精度、数据采样频率等对恢复地球重力场精度的影响。

3.1 不同轨道倾角的结果

理论上讲,为获得全球覆盖的重力数据,倾角 I 应该为 90° (具备了两极数据),现在取这一理想状况来恢复地球重力场模型,并假设仪器可以测定所有频段的数据,即不考虑有限带宽问题,同时满足以上假设条件,采用的轨道参数如表 3 所示。

表 3 理想状态下的轨道参数

Tab.3 Orbit elements in ideal case

参数项目	参数值	参数项目	参数值
梯度分量	V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}	轨道倾角($^\circ$)	90
采样率(s)	5,1	轨道高度(km)	250
任务持续时间(天)	29	卫星旋转周期(s)	5 365
无带宽限制	$\beta_{\min} = 0$	白噪声	$3\text{mE}/\text{Hz}^{1/2}$

现在分析轨道倾角为 87° 、 90° 、 93° 、 96.5° 和 99° 时, V_{zz} 分量恢复重力场的能力见图 1、图 2, 图中标注的参数是轨道倾角。

由图 1、图 2 可知,在 5 个倾角中倾角 90° 与 96.5° 方案的精度基本相当,且精度最高; 87° 与 93° 基本相同,精度次之; 99° 精度最差。轨道倾角 96.5° 的卫星精度反而比 93° 和 99° 的高,主要与数据分布有关,当卫星轨道倾角不是 90° 时,其观测数据并非全球覆盖,但在数据量一定的前提下,缺少极地数据(使得某些位系数信息减少),其它地区的数据覆盖密度必然增加(使得某些位系数信息增加),有可能这部分数据对位系数的改善比缺少极地数据对结果的影响要大,那么就存在一个平衡点。如果所有

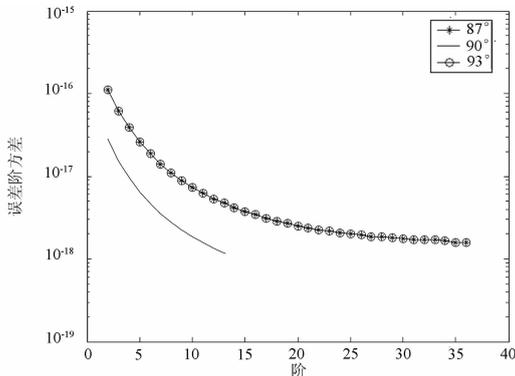


图 1 不同倾角(87° 、 90° 、 93°)的误差阶方差

Fig.1 Error degree variances with different inclinations ($87^\circ, 90^\circ, 93^\circ$)

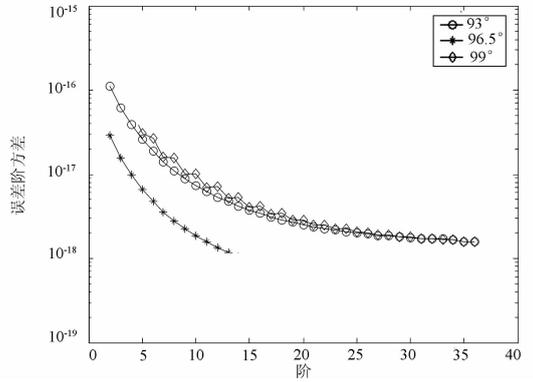


图 2 不同倾角(93° 、 96.5° 、 99°)的误差阶方差

Fig.2 Error degree variances with different inclinations ($93^\circ, 96.5^\circ, 99^\circ$)

的倾角函数在 90° 时都取到最大值,那么轨道倾角增加时信号必然减少,传播误差必然增加。然而实际情况并非如此,实际上,信号可能增加也可能减少,所以传播误差的结果并不是必然增加的^[9]。

3.2 不同轨道高度的结果

图 3 和图 4 给出了 $180 \sim 300 \text{ km}$ 径向方向的误差阶方差分布图,由图可知:重力梯度恢复重力场的精度随轨道高度降低而提高,同时沿轨道方向和垂直轨道方向的分析结果相当,不过变化更大。

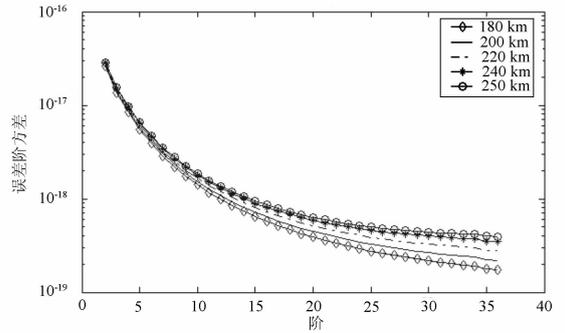


图 3 不同轨道高度($180 \sim 250 \text{ km}$)的误差阶方差

Fig.3 Error degree variances with different altitudes ($180 \sim 250 \text{ km}$)

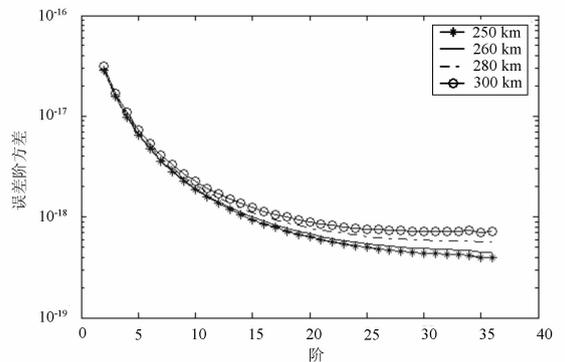


图 4 不同轨道高度($250 \sim 300 \text{ km}$)的误差阶方差

Fig.4 Error degree variances with different altitudes ($250 \sim 300 \text{ km}$)

3.3 不同采样间隔的计算结果

重力梯度采样间隔与重力数据的空间覆盖成反比,即采样间隔越小,单位面积的梯度数据越多,获取的地球重力场信息也就越多,恢复重力场模型的精度及其空间分辨率必然越高。

GOCE 卫星的采样间隔分 1 秒和 5 秒两种情况,为简便计算采样间隔采用 5 分,1 分,5 秒进行计算,图 5 给出在不同采样间隔情况下径向梯度分量的误差阶方差分布,说明随着采样间隔的逐渐减小,恢复重力场模型的精度也将逐渐提高。

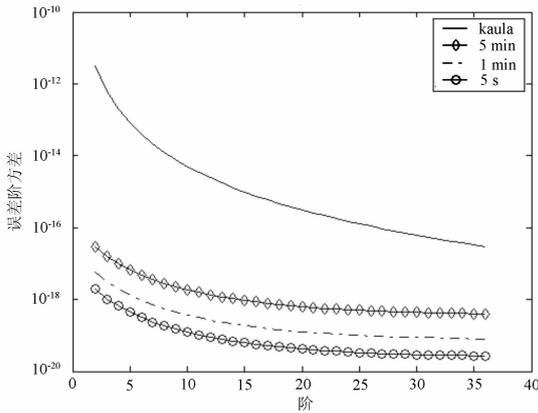


图 5 不同采样间隔的误差阶方差

Fig. 5 Error degree variances with different sampling rates

3.4 重力梯度仪测量精度的影响分析

根据误差阶方差的定义可知:在不考虑有色噪声情况下,时域最小二乘模型观测方程的误差阶方差,就是法方程系数阵 N 的逆阵的主对角元素之和,而观测值协因数阵 $Q = \sigma_0^2 I$,其 σ_0 为梯度观测分量的观测精度。据此可知梯度仪测量精度的变化将直接反应在法方程系数的协因数阵上,必然直接影响恢复重力场的精度。

图 6 给出了重力梯度仪的仪器设计精度的误差阶方差分布,1、3、5 分别代表 $1\text{mE}/\text{Hz}^{1/2}$ 、 $3\text{mE}/\text{Hz}^{1/2}$ 、 $5\text{mE}/\text{Hz}^{1/2}$ 3 个梯度仪的精度指标。由图 6 可知重力梯度仪精度越高,重力梯度观测恢复重力场的精度也越高。

3.5 重力梯度分量组合的结果与分析

由于不同的数据对恢复重力场的贡献不同,所以对重力梯度张量中对重力场贡献较大的分量 V_{xx} 、 V_{yy} 、 V_{zz} 通过采用多种组合进行计算,对结果进行评价,并分析结果产生的原因。

结合图 7,根据比较分析可知:1)采用单个分量恢复重力场时, V_{zz} 梯度分量的结果较好, V_{xx} 次之, V_{yy} 最差,但 V_{yy} 与 V_{xx} 相差不远;2)在多种梯度分量组合计算时,即使采用 V_{xx} 与 V_{yy} 两种分量组合计算,虽较其单一分量计算时精度有所改善,但依然低于仅采

用 V_{zz} 计算的精度;3)在包含 V_{zz} 分量的所有组合中,组合的分量都比不组合时精度高,且以 3 个主分量组合时的精度最高。原因很明显,即同等精度的重力梯度数据量越大,地球重力场的信息越多,恢复重力场的精度就越高。

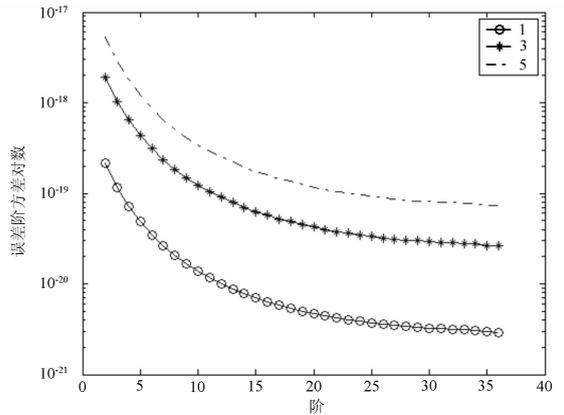


图 6 重力梯度仪精度的误差阶方差

Fig. 6 Error degree variances with different gravity gradiometry accuracies

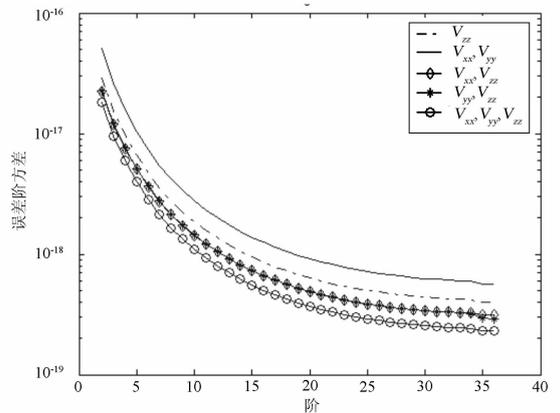


图 7 不同梯度分量组合的误差阶方差

Fig. 7 Error degree variances with different combinations

3.6 卫星不同寿命的结果与分析

理论分析可知,卫星运行的时间越长,卫星重力梯度观测数据就越多,即可以得到更高分辨率的地球重力场模型。本文采用 29 天和 59 天的径向梯度数据进行计算,其误差分布如图 8 所示。并得出:卫星运行寿命越长,其恢复的重力场的精度就越高。

4 结论

本文基于轨道摄动理论建立了卫星重力梯度分量的时域表达式,研究了利用卫星梯度数据恢复地球重力场的时域最小二乘法的理论和算法。以 GOCE 卫星的轨道参数为参考,基于时域最小二乘法重点分析了重力梯度卫星的轨道高度、轨道倾角、卫星寿命(数据长度)及重力梯度测量精度。数据采

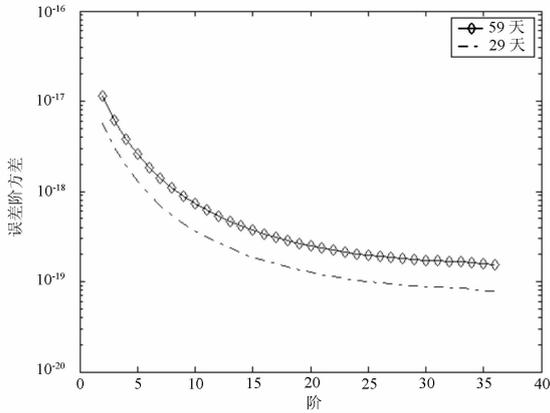


图8 不同卫星寿命的误差阶方差

Fig. 8 Error degree variances with different lifetimes of satellite

样频率等对恢复地球重力场的影响。根据本文的计算结果可得到如下结论:

1) 卫星轨道高度越高,任务时间越长,采样间隔越小,仪器精度越高,卫星恢复重力场精度就越高;

2) 在尽可能地保证数据全球覆盖的前提下,多种轨道倾角方案分析表明,GOCE的轨道倾角是一种比较理想的情况,其精度基本与 90° 倾角情况相同;

3) 联合 V_{xx} 、 V_{yy} 、 V_{zz} 梯度分量恢复重力场的结果优于采用单一数据结果:联合3种分量恢复重力场的精度最高,其它与 V_{zz} 分量联合计算的精度较高, V_{zz} 单一计算精度第三,而 V_{xx} 、 V_{yy} 联合的精度最差。

总之,时域最小二乘方法是基于卫星轨道摄动理论的方法,能准确反映卫星的轨道特征并顾及卫星轨道误差等的影响,适合于卫星重力梯度测量的误差分析和方案设计,这对我国未来的重力卫星的发射提供有用的参考。而且一旦拥有观测数据,也可用于地球重力场的实际确定。

References

1 宁津生,等.我国省市级大地水准面精化的现状及技术模式[J].大地测量与地球动力学,2004,24(1):4~8.
1 Ning Jinsheng, et al. Present situations and technical modes for refining provincial(municipal) geoid in China[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2004, 24(1): 4 - 8. (in Chinese)

2 宁津生.卫星重力探测技术与地球重力场研究[J].大地测量与地球动力学,2002,22(1):1~5.
2 Ning Jinsheng. The satellite gravity surveying technology and research of earth's gravity field[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22(1): 1 - 5. (in Chinese)
3 孙文科.低轨道人造卫星(CHAMP、GRACE、GOCE)与高精度地球重力场[J].大地测量与地球动力学,2002,22(1):92~100.
3 Sun Wenke. Satellite in low orbit(CHAMP, GRACE, GOCE) and high precision earth gravity field[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2002, 22(1): 92 - 100. (in Chinese)
4 宁津生,罗志才,陈永奇.卫星重力梯度数据用于精化地球重力场的研究[J].中国工程科学,2002,4(7):23~28.
4 Ning Jingsheng, Luo Zhicai and Chen Jongqi. Application of satellite gravity gradiometry data to the refinement of the Earth's gravity field[J]. Engineering Science, 2002, 4(7): 23 - 28. (in Chinese)
5 ESA. Gravity field and steady-state ocean circulation mission[R]. 1999, SP-1233(1).
6 Rummel R and Colombo O L. Gravity field determination from satellite gradiometry[J]. Bulletin Géodésique, 1985, 59:233-246.
7 罗志才.利用卫星重力梯度数据确定地球重力场的理论和方法[D].武汉测绘科技大学,1996.
7 Luo Zhicai. The theory and methodology for determining the Earth's gravity field using satellite gravity gradiometry data[D]. Wuhan Technical University of Surveying and Mapping, 1996. (in Chinese)
8 Sneeuw N, Koop R, et al. Validation of fast pre-mission error analysis of the GOCE gradiometry mission by a full gravity field recovery simulation[J]. Journal of Geodynamics, 2002, 33:43-53.
9 Rummel R and Sanso et al F. Spherical harmonic analysis of satellite gradiometry[M]. Netherlands Geodetic Commission, New Series, 1993.
10 刘林.卫星径向位置摄动计算中的几个问题[J].天文学报,1997,38(2):191~203.
10 Liu Lin. Several problems in the calculations of satellite radial position perturbations[J]. Acta Astronomica Sinica, 1997, 38(2): 191 - 203. (in Chinese)
11 Pail R and Plank G. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE satellite gravity gradiometry implemented on a parallel platform[J]. Journal of Geodesy, 2002, 76:462-474.