第33卷第1期 大地测量与地球动力学 Vol. 33 No. 1
2013年2月 JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS Feb. ,2013

文章编号:1671-5942(2013)01-0048-05

加权整体最小二乘算法的改进*

杨仕平[1)] 范东明[1)] 龙玉春[2)]

(1)西南交通大学地球科学与环境工程学院测绘工程系,成都 610031
2)重庆市合川龙市中学,合川 401564)

摘 要 针对EIV模型中系数矩阵含有重复元素的问题,通过考虑系数矩阵元素间的相关性,改进已有的加权整体最小二乘法,使得重复元素的改正数的绝对值相等。并将改进方法应用于直线拟合和解算三维小角度基准转换模型。算例证明,相比以往的参数估计方法,利用改进后的加权整体最小二乘法能够得到更合理的系数矩阵残差阵。

关键词 EIV模型;改进的加权整体最小二乘法;直线拟合;三维小角度基准转换;系数矩阵

中图分类号:P207 **文献标识码**:A

AN IMPROVED WEIGHTED TOTAL LEAST SQUARES ALGORITHM

Yang Shiping[1)], Fan Dongming[1)] and Long Yuchun[2)]

(1)*Faculty of Geoscience and Environmental Engineering*, *Southwest Jiaotong University*, *Chengdu* 610031
2)*Chongqing Hechuan Longshi Middle School*, *Hechuan* 401564)

Abstract In connection with the problem of EIV model's coefficient matrix containing repetitive elements, The author improves the available weighted total least squares method through making the repeat element's correction equal, taking into account the correlation between the elements of coefficient matrix, Then, the improved method is applied to the linear fitting, to solve the small rotation angle of 3D datum transformation model. The examples show that, compared with toprevious parameter estimation methods, the improved weighted total least squares (IWTLS) method can obtation a more rational residual matrix of coefficient matrix.

Key words: EIV model; improved weighted total least squares method; linear fitting; three dimensional small rotation angle datum transformation; coefficient matrix

1 引言

从Golub和van Loan[1]提出利用基于奇异值分解法(SVD,Singular Value Decom-position)的整体最小二乘法求解EIV模型至今,整体最小二乘法一直在不断地发展。鉴于SVD方法计算复杂不利于编程,研究人员陆续提出了整体最小二乘的其他解法,如迭代算法、完全正交分解法等改进方法[2-4]。

在大地测量和工程测量数据处理中,绝大部分都可以归结为参数估计问题,这些参数估计问题大致可以分为普通最小二乘估计问题和整体最小二乘估计问题,而整体最小二乘估计问题可进一步分为

* 收稿日期:2012-05-12
基金项目:地球空间环境与大地测量教育部重点实验室测绘基础研究基金(04-01-02)
作者简介:杨仕平,男,1986年生,硕士研究生,研究方向为精密工程测量与数据处理. E-mail:iailovewl@163.com
通讯作者:范东明,男,1964年生,博士,教授,博士生导师,主要研究领域及方向:现代大地测量,土地信息系统,地球重力场理论与应用等. E-mail: dmfan@home.swjtu.edu.cn

系数阵的元素全部含有随机误差及只有部分含有随机误差两种情况。

针对测绘数据处理中系数矩阵有特殊结构的 EIV 模型,陆钰等[5]提出用 LS-TLS 将系数矩阵中不需要修正的列固定,但它不能固定所有的不需要修正的元素,不能考虑重复元素;Schaffrin 等[6]提出在加权整体最小二乘法解算过程中,采用特定的定权方法,它可以固定所有不需要修正的常数元素,但协方差阵结构特殊不具普适性,在某些案例中不适用,而且不能解决重复元素的问题;Schaffrin[7,8]等提出多元整体最小二乘法,能避免系数矩阵出现重复元素,但是不能解决某些常数元素不需要修正的问题,且没有考虑观测值的权;Shen 等[9]提出用拉格朗日乘数法解算加权整体最小二乘,计算过程更简单,但他们仍然采用 Schaffrin 等提出的定权方法,还是没有考虑系数矩阵元素的重复性;Mahboub[10]提出对系数矩阵的协方差阵加入特殊说明来自动获得精确解,但是该方法过程复杂,计算所需时间长,收敛速度较慢;袁庆等[6]将加权整体最小二乘法应用于三维基准转换中,达到改正系数矩阵所有数据元素和固定所有常数元素的作用,但是该方法没有考虑系数矩阵中的重复元素,相等元素的改正数不等。本文引用文献[9]的迭代方法且结合 Mahboub 提出的定权理论,推导出更具普适性、收敛速度更快、自动解决系数矩阵元素的重复性的迭代算法,并将此方法应用于直线拟合和三维小角度基准转换验证该算法的效果。

2　改进的加权整体最小二乘算法

关于系数矩阵定权比较成熟的方法当属 $\boldsymbol{Q}_A$ 构造法,将 $\boldsymbol{Q}_A$ 分解为 $\boldsymbol{Q}_0 \in \boldsymbol{R}^{m\times m}$、$\boldsymbol{Q}_x \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$[8]:

$$\boldsymbol{Q}_A = \boldsymbol{Q}_0 \otimes \boldsymbol{Q}_x \tag{1}$$

$$\boldsymbol{P}_y = \boldsymbol{Q}_y^{-1},\ \boldsymbol{P}_A = \boldsymbol{Q}_A^{-1} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{Q}_y \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$、$\boldsymbol{Q}_A \in \boldsymbol{R}^{mn\times mn}$分别为观测向量的协方差矩阵和系数矩阵列向量化后协方差矩阵,$\boldsymbol{P}_y \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$、$P_A \in R^{mn\times mn}$分别为观测向量是权阵和系数矩阵列向量化后的权阵。它将 $\boldsymbol{P}_A$ 看成是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列向量化后的向量权阵,使得 $\boldsymbol{P}_A$ 可以对 $\boldsymbol{A}$ 中的每一个元素定权,但是它却没有考虑元素之间的相关性,认为各个元素间是相互独立的。

实际应用发现,很多情况下系数矩阵中个元素间并不是完全相互独立的,某些元素重复出现,这些重复元素之间应该存在相关性,从理论的严密性来说文献[11]的方法不够严密,得出的解不是最优解。2012 年 Mahboub[10]提出利用一定原则构造考虑元素间相关性的协方差阵,该方法利用以下五条原则构造系数矩阵的协方差矩阵:

1)如果系数阵的某个元素重复出现,认为这两个元素 100% 相关,因此这两个元素之间的协方差等于重复元素的自方差;

2)假如系数阵的某个元素以其相反数的形式重复,认定这两个元素 100% 负相关,因此这两个元素之间的协方差等于重复元素的自方差的相反数;

3)如果系数阵的某个元素是常数,认为其方差为零;

4)系数阵中两个不同元素,若两者明显相关,他们的协方差即为其实际值,否则为零;

5)上述规则在同方差情况中同样适用,若元素是随机数只需用数字 1 作为其方差,若是常数其自方差为零。

本文采用上述五条规则,重新构造系数矩阵的协方差阵,然后结合文献[9]的迭代方法提出改进的加权整体最小二乘法。用改进的加权整体最小二乘法解算方程组

$$\boldsymbol{y} - \boldsymbol{e}_y = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_A)(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta\xi}),\ \mathrm{rank}\boldsymbol{A} = m < n \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{n\times m}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}_A \in \boldsymbol{R}^{n\times m}, \xi, \delta\xi \in R^{m\times 1}$。具体的解算步骤如下:

1)根据上述五条规则生成 $\boldsymbol{Q}_A$;

2)设置初始值 $\boldsymbol{E}_{A(0)} = 0, \boldsymbol{\xi}_{(0)} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$;

3)$$\boldsymbol{Q}_{l(i)} = \boldsymbol{Q}_y + (\boldsymbol{\xi}_{(i)}^{\mathrm{T}} \otimes \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\xi}_{(i)} \otimes \boldsymbol{I}_n) \tag{4}$$

$$\boldsymbol{A}_{(i)} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{E}_{A_{(i)}} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\delta\xi}_{(i+1)} = (\boldsymbol{A}_{(i)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{l(i)}^{-1}\boldsymbol{A}_{(i)})^{-1}\boldsymbol{A}_{(i)}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{l(i)}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A\xi}_{(i)}) \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\xi}_{(i+1)} = \boldsymbol{\xi}_{(i)} + \boldsymbol{\delta\xi}_{(i+1)} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{e}_{A_{(i+1)}} = -\boldsymbol{Q}_A(\boldsymbol{\xi}_{(i)} \otimes \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{Q}_{l(i)}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A\xi}_{(i)} - \boldsymbol{A}_{(i)}\delta\xi_{(i+1)}) \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{e}_A$ 为数矩阵列向量化后向量的随机误差,"⊗"为 kronecker 积算子,如:

$$\boldsymbol{M}_{2\times 2} \otimes \boldsymbol{N}_{n\times n} = \begin{bmatrix} m_{11}\boldsymbol{N} & m_{12}\boldsymbol{N} \\ m_{21}\boldsymbol{N} & m_{22}\boldsymbol{N} \end{bmatrix}$$

4)重复步骤 3),直到 $\|\boldsymbol{\delta\xi}_{(i+1)}\| < \varepsilon_0$($\varepsilon_0$ 为给定的阀域值)停止循环;

5)计算观测向量的残差矩阵 $\boldsymbol{e}_y$ 和单位权中误差 σ_0:

$$\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{Q}_y\boldsymbol{Q}_l^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A\xi}_{(i)} - \boldsymbol{A}_{(i)}\delta\xi_{(i+1)}) \tag{9}$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\boldsymbol{e}_y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_y\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_A\boldsymbol{e}_A}{n-m}} = [(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A\xi}_{(i)} - \boldsymbol{A}_{(i)}\delta\xi_{(i+1)})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}_{l(i)}^{-1})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{A\xi}_{(i)} - \boldsymbol{A}_{(i)}\delta\xi_{(i+1)})/(n-m)]^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

3 改进的加权整体最小二乘法在直线拟合和三维空间基准变换中的应用

3.1 直线拟合

为了检验改进加权整体最小二乘算法的效果，引用文献[12]的实验数据，坐标观测值（X_i, Y_i）及其相应的权（W_{X_i}, W_{Y_i}）列于表1。直线拟合的 *EIV* 模型为式(11)，由式(11)可知系数矩阵的第一列是常数不需要修正，按上述五条规则构造系数矩阵的协方差矩阵 $\boldsymbol{Q_A}$ 为式(12)。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{y_1} \\ \vdots \\ e_{y_n} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & e_{x_1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & e_{x_n} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{Q_A} = \mathrm{Diag}[\underbrace{0, 0, \cdots, 0}_{10}, W_{x1}^{-1}, W_{x2}^{-1}, \cdots, W_{x10}^{-1}] \tag{12}$$

将表1中的观测值分别用加权整体最小二乘法（WTLS）和本文方法（IWTLS）进行求解，参数估值列于表2。由表2可以看出，为求得拟合参数的精确值，取阀值 $\varepsilon_0 = 10^{-10}$，WTLS 法需要迭代14次，而IWTLS 法只需7次，说明本文方法可行且在本实验中收敛速度更快。

表1 坐标观测值及其相应权[12]

Tab. 1 Coordinate observations and their corresponding weights[12]

编号 i	X_i	W_{xi}	Y_i	W_{yi}
1	0	1 000	5.9	1
2	0.9	1 000	5.4	1.8
3	1.8	500	4.4	4
4	2.6	800	4.6	8
5	3.3	200	3.5	20
6	4.4	80	3.7	20
7	5.2	60	2.8	70
8	6.1	20	2.8	70
9	6.5	1.8	2.4	100
10	7.4	1	1.5	500

3.2 空间三维布尔沙转换模型

当旋转角是小角度或初值已知，且控制点数不小于3个时，布尔沙转换模型可写成：

$$\begin{bmatrix} X_{T1} \\ Y_{T1} \\ Z_{T1} \\ \vdots \\ X_{Tn} \\ Y_{Tn} \\ Z_{Tn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{S1} & Y_{S1} & X_{S1} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{S1} & 0 & -X_{S1} & Y_{S1} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{S1} & X_{S1} & 0 & Z_{S1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -Z_{Sn} & Y_{Sn} & X_{Sn} \\ 0 & 1 & 0 & Z_{Sn} & 0 & -X_{Sn} & Y_{Sn} \\ 0 & 0 & 1 & -Y_{Sn} & X_{Sn} & 0 & Z_{Sn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \\ \varepsilon_X \\ \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \mu \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中，(X_S, Y_S, Z_S)、(X_T, Y_T, Z_T)分别为原始坐标系和目标坐标系；(X_0, Y_0, Z_0)为平移参数，ε_X、ε_Y、ε_Z 为旋转参数，μ 为尺度参数。由式(13)得出，系数矩阵中不仅有不需要改正的常数，还含有重复的随机元素。为了验证改进的加权整体最小二乘法能控制系数矩阵重复元素的改正数，我们将该方法应用到该模型，实验数据如表3。

分别用 LS、LS-TLS、WTLS 以及 IWTLS 法求出转换参数；分别用7个公共点和全部公共点进行坐标转换求解参数及精度；最后将各方法求解的参数估值及精度列于表4和表5；用7个公共点求解坐标转换参数时系数矩阵的误差矩阵如表6。

表2 WTLS 法和 IWTLS 法解算的参数估值

Tab. 2 Estimated parameters with the methods: WTLS and IWTLS

参数精确值		加权整体最小二乘法		改进的加权整体最小二乘法	
a	b	a	b	a	b
5.479 910 224	−0.480 533 407	5.397 459 627	−0.463 972 172	5.397 459 627	−0.463 972 172
		5.463 964 253	−0.477 223 49	5.479 194 205	−0.480 383 578
		5.483 016 896	−0.481 149 839	5.479 904 971	−0.480 532 29
		5.480 483 801	−0.480 653 167	5.479 910 193	−0.480 533 401
		5.479 800 964	−0.480 511 731	5.479 910 215	−0.480 533 406
		5.479 889 789	−0.480 529 143	5.479 910 224	−0.480 533 407
		5.479 914 076	−0.480 534 171	5.479 910 224	−0.480 533 407
		5.479 910 952	−0.480 533 559		
		5.479 910 088	−0.480 533 381		
		5.479 910 198	−0.480 533 402		
		5.479 910 229	−0.480 533 408		
		5.479 910 225	−0.480 533 408		
		5.479 910 224	−0.480 533 407		
		5.479 910 224	−0.480 533 407		

表 3　制点坐标观测值及相应精度[11]（单位:m）

Tab. 3　Coordinate observations of control points and their corresponding accuracy[11]（unit:m）

	原始坐标				目标坐标			
	X_S	Y_S	Z_S	σ	X_T	Y_T	Z_T	σ
1	−2 802 191.348 2	5 009 064.765 7	2 772 381.176 8	0.01	−2 802 088.418 2	5 009 123.156 9	2 772 386.569 9	0.01
2	−2 810 175.651 5	5 016 086.112 0	2 751 955.053 1	0.02	−2 810 072.730 9	5 016 144.572 1	2 751 960.500 7	0.02
3	−2 820 567.227 2	5 009 905.344 4	2 752 470.385 8	0.03	−2 820 464.394 2	5 009 963.991 7	2 752 475.921 1	0.03
4	−2 817 162.653 8	5 002 454.352 0	2 769 299.110 6	0.04	−2 817 059.835 1	5 002 512.999 3	2 769 304.628 8	0.04
5	−2 825 775.818 2	4 995 785.495 5	2 772 390.169 5	0.05	−2 825 673.090 6	4 995 844.301 3	2 772 395.762 9	0.05
6	−2 821 096.763 4	4 981 344.211 2	2 802 869.494 4	0.06	−2 820 994.060 5	4 981 403.048 6	2 802 875.077 3	0.06
7	−2 824 710.665 4	4 984 669.284 6	2 793 431.999 9	0.07	−2 824 607.984 6	4 984 728.145 8	2 793 437.599 7	0.07
8	−2 827 287.538 0	4 983 602.697 4	2 792 671.081 7	0.08	−2 827 184.875 9	4 983 661.601 6	2 792 676.704 2	0.08
9	−2 759 256.958 4	5 019 419.072 5	2 796 705.276 2	0.09	−2 759 153.720 2	5 019 476.803 6	2 796 710.316 7	0.09
10	−2 800 063.333 9	5 001 135.290 0	2 788 830.195 9	0.10	−2 799 960.417 6	5 001 193.709 4	2 788 835.580 2	0.10
11	−2 841 162.870 7	4 981 982.504 1	2 781 464.448 9	0.11	−2 841 060.290 2	4 982 041.618 3	2 781 470.180 5	0.11

表 4　7 个点求解参数及精度比较(1、3、6、7、9、10、11 号点)

Tab. 4　Comparison among the calculated parameters and accuracies with piont 1,3,6,7,9,10,11

方法	X_0 (m)	Y_0 (m)	Z_0 (m)	μ	ε_X (10^{-5}rad)	ε_Y (10^{-5}rad)	ε_Z (10^{-5}rad)	σ_0(mm)
LS	−3.931 6	7.315 8	4.003 7	0.999 999 02	0.304 5	−0.690 8	1.696 4	4.689
LS-TLS	−3.931 6	7.315 8	4.003 7	0.999 999 02	0.304 5	−0.690 8	1.696 4	3.913
WTLS	−3.928 8	7.309 2	4.000 4	0.999 999 02	0.304 9	−0.691 3	1.696 1	3.579
IWTLS	−3.928 8	7.309 2	4.000 4	0.999 999 02	0.304 6	−0.690 8	1.696 3	3.246

表 5　全部公共点求解参数及精度比较

Tab. 5　Comparison among the calculated parameters and accuracies with all pionts

方法	X_0 (m)	Y_0 (m)	Z_0 (m)	μ	ε_X (10^{-5}rad)	ε_Y (10^{-5}rad)	ε_Z (10^{-5}rad)	σ_0(mm)
LS	−3.879 4	7.231 9	3.952 0	0.999 999 04	0.304 2	−0.690 2	1.696 7	3.975
LS-TLS	−3.879 4	7.231 9	3.951 9	0.999 999 04	0.304 2	−0.690 2	1.696 7	3.482
WTLS	−3.880 8	7.234 2	3.953 1	0.999 999 04	0.304 2	−0.690 2	1.696 7	2.810
IWTLS	−3.879 2	7.232 0	3.951 2	0.999 99 904	0.304 2	−0.690 3	1.696 6	2.507

表 6　IWTLS 法系数矩阵的残差阵 $\boldsymbol{E}_A$（单位:m）

Tab. 6　Residuals matrix of coefficient matrix with IWTLS（unit:m）

$$
\boldsymbol{E}_A = \begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.000\,006\,989\,4 & 0.000\,036\,854\,0 & 0.000\,056\,155\,5 \\
0 & 0 & 0 & -0.000\,006\,989\,4 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.000\,056\,155\,5 & 0.000\,036\,854\,0 \\
0 & 0 & 0 & -0.000\,036\,854\,0 & -0.000\,056\,155\,5 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.000\,006\,989\,4 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.000\,090\,723\,3 & -0.000\,188\,058\,1 & -0.000\,230\,083\,7 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,090\,723\,3 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.000\,230\,833\,7 & -0.000\,188\,058\,1 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,188\,058\,1 & 0.000\,230\,833\,7 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.000\,090\,723\,3 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.000\,169\,230\,2 & -0.000\,101\,504\,3 & -0.000\,265\,351\,0 \\
0 & 0 & 0 & -0.000\,169\,230\,2 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.000\,265\,351\,0 & -0.000\,101\,504\,3 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,101\,504\,3 & 0.000\,265\,351\,0 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.000\,169\,230\,2 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.000\,609\,855\,9 & -0.001\,091\,238\,1 & -0.001\,417\,623\,3 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,609\,855\,9 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.001\,417\,623\,3 & -0.001\,091\,238\,1 \\
0 & 0 & 0 & 0.001\,091\,238\,1 & 0.001\,417\,623\,3 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.000\,609\,855\,9 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.001\,768\,561\,3 & -0.001\,797\,941\,6 & -0.001\,387\,047\,6 \\
0 & 0 & 0 & 0.001\,768\,561\,3 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.001\,387\,047\,6 & -0.001\,797\,941\,6 \\
0 & 0 & 0 & 0.001\,797\,941\,6 & 0.001\,387\,047\,6 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.001\,768\,561\,3 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.001\,268\,930\,4 & -0.000\,437\,036\,0 & -0.002\,023\,021\,9 \\
0 & 0 & 0 & -0.001\,268\,930\,4 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.002\,023\,021\,9 & -0.000\,437\,036\,0 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,437\,036\,0 & 0.002\,023\,021\,9 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.001\,268\,930\,4 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.000\,662\,968\,2 & 0.001\,137\,518\,9 & 0.002\,676\,215\,4 \\
0 & 0 & 0 & 0.000\,662\,968\,2 & 0.000\,000\,000\,0 & -0.002\,676\,215\,4 & 0.001\,137\,518\,9 \\
0 & 0 & 0 & -0.001\,137\,518\,9 & -0.002\,676\,215\,4 & 0.000\,000\,000\,0 & 0.000\,662\,968\,2
\end{bmatrix}
$$

当迭代阀值 ε_0 取 10^{-10} 时,文献[10]的方法需要迭代 117 次,本文方法只需 58 次,再次证明本方法收敛速度比文献[10]的方法快。由表 4、5 可以得出,IWTLS 方法较 LS 方法精度提高 30% 以上,比混合最小二乘法提高了 20% 以上,比原有的 WTLS 的精度提高了 5% 以上。由表 6 可以看出在 IWTLS 中,系数矩阵的常数元素被固定,只修改了随机元素,系数矩阵残差阵中重复元素的改正数相等,与文献[11]中系数阵的残差阵相比更为严密,使得整体最小二乘法在解算 EIV 模型时更为合理。

4 结束语

1)使用加权整体最小二乘法,引入系数矩阵及观测向量的权阵,一是可以顾及观测值精度不等的情况;二是可以对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中的部分元素加以改正,使 EIV 模型更加合理,使整体最小二乘法应用更为广泛。

2)引用最新的定权理论,对加权整体最小二乘法的系数阵的权阵加以改进,提出了改进的加权整体最小二乘法,并将该方法应用到直线拟合、三维小角度坐标转换中。计算精度较最小二乘法提高 30% 以上,较混合整体最小二乘法提高 20% 以上。IWTLS 方法考虑了系数矩阵中元素间的相关性,对系数矩阵中重复元素的改正数加以控制,使相同随机元素的改正数相等,在理论上更严密。至于系数矩阵中元素间的相关性是否可以忽略,在什么条件下忽略,不可忽略的话对结果的影响有多大还需要进一步研究。

3)参考丁克良等[13]提出的整体最小二乘应用条件:从参数估计的角度讲,只有在系数矩阵误差对最小奇异值的大小影响显著时,整体最小二乘法效果才比较明显;当系数矩阵的误差对最小奇异值的影响较小时,即系数矩阵比较精确时,就不适于采用整体最小二乘法。所以在实际应用中,我们要根据实际情况判断是否需要用整体最小二乘法。

参 考 文 献

1 Golub G H and van Loan. An analysis of the total least-squares problem[J]. SIAM J Numer Anal. ,1980,17:883 – 893.

2 魏木生. 广义最小二乘问题的理论和计算[M]. 北京:科学出版社,2006. (Wei Musheng. Generalized least squares theory and calculation[M]. Beijing:Science Press,2006)

3 孔建,姚宜斌,吴寒. 整体最小二乘的迭代解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2010,35(6):711 – 714. (Kong Jian,Yao Yibin and Wu Han. Iterative method for total least – squares[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University,2010,35(6):711 – 714)

4 鲁铁定,周世健. 总体最小二乘的迭代解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版),2010,35(11):1 351 – 1 354. (Lu Tieding and Zhou Shijian. An itreative algorithm for total least squares estimation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University,2010,35(11):1 351 – 1 354)

5 陆珏,陈义,郑波. 总体最小二乘方法在坐标转换中的应用[J]. 大地测量与地球动力学,2008,(5):77 – 81. (Lu Jue,Chen Yi and Zheng Bo. Applying total least squares to three-dimensional datum transformation[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2008,(5):77 – 81)

6 Schaffrin B and Wieser A. On weighted total least – squares adjustment for linear regression[J]. J Geodes. ,2008,82(7):415 – 421.

7 Schaffrin B and Felus Y A. On the multivariate total least squares approach to empirical coordinate transformation[J]. J Geodes. ,2008,82(6):373 – 383.

8 Schaffrin B and Felus Y A. A multivariate total least-squares adjustment for empirical affine transformations[J]. International Association of Geodesy Symposia, 2008,132(3):238 – 242.

9 Shen Y Z,Li B F and Chen Y. An iterative solution of weighted total least-squares adjustment[J]. Journal of Geodesy, 2010,85(4):229 – 238.

10 Vahid Mahboub. On weighted total least – squares for geodetic transfor mations[J]. J Geod. ,2012,86(5):359 – 367.

11 袁庆,楼立志,陈玮娴. 加权总体最小二乘在三维基准中的应用[J]. 测绘学报,2011,40:115 – 119. (Yuan Qing, Lou Lizhi and Chen Weixian. The application of the weighted total least-squares to three dimensional – datum transformation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2011,40:115 – 119)

12 Neri F, Saitta G and Chiofalo S. Accurate and straightforward approach to line regression analysis of error-affected experimental data[J]. Phys E. ,1989,22(4):215 – 217.

13 丁克良,欧吉坤,陈义. 整体最小二乘法及其在测量数据处理中的应用[A]. 中国测绘学会第九次全国会员代表大会暨学会成立 50 周年纪念大会论文集[C]. 2009,399 – 405. (Ding Keliang, Ou Jikun and Chen Yi. Total least-squares and its application in the measurement data processing[A]. Proceedings of the ninth national congress of the members of China surveying and mapping society and association established 50 anniversary conference[C]. 2009,399 – 405)