

利用先验频谱信息的多频段宽带接收机的设计^{*}

张 鹏^{1,2)} 徐争光³⁾ 邹进贵^{1,2)} 孙福余¹⁾

(1) 武汉大学测绘学院, 武汉 430079
(2) 精密工程与工业测量国家测绘地理信息局重点实验室, 武汉 430079
(3) 华中科技大学电信系, 武汉 430074

摘 要 “随机解调”是一种基于压缩感知理论的接收机框架。当多频段宽带信号在频域上满足稀疏性条件时,采用“随机解调”接收机能够实现较低采样率下信号的采集和重建。在“随机解调”接收机框架的基础上,利用信号频谱分布的先验知识,对“随机解调”的信号重建环节进行简化,并提出了逆矩阵重建算法。该算法不仅简化了计算,而且能够获得更好的信号重建效果。

关键词 多频段采样;接收机;压缩感知;随机解调;逆矩阵重建算法

中图分类号:TN965.5

文献标识码:A

DESIGN OF MULTI/WIDE BANDS RECEIVER WITH PRIORI SPECTRUM INFORMATION

Zhang Peng^{1,2)}, Xu Zhengguang³⁾, Zou Jingui^{1,2)} and Sun Fuyu¹⁾

(1) School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079
(2) The Key Laboratory of Precise Engineering and Industry Surveying, National Administration of Surveying, Mapping and Geoinformation, Wuhan 430079
(3) Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074

Abstract As a compressive-sensing-based receiver platform, random demodulator can sample and reconstruct multi/wide bands signals meeting the requirement of sparse spectrum with low sampling rate. This research simplifies this reconstruction algorithm utilizing the priori spectrum information. We propose a novel reconstruction algorithm; inverse matrix, which not only simplifies the calculation but also enhances the performance of signal reconstruction.

Key words: multiband sampling; receiver; compressive sensing; random demodulator; inverse matrix algorithm

1 前言

多频段宽带信号通常由多个在频域上稀疏分布的窄带信号组成。这类特殊的宽带信号给接收机的设计提出了新的要求。根据奈奎斯特定理,采样率

要大于宽带信号最高频率的两倍,才能避免频谱混叠,进而无差错地重建信号。但是随着宽带信号最高频率的不断提高,对采样率提出了新的挑战。

对于多频段宽带信号,最直观的方案是分别将每一个窄带信号下变频到基带,然后在基带完成采

* 收稿日期:2012-05-25

基金项目:国家自然科学基金(41074025);高等学校博士学科点专项科研基金(20110141120046);精密工程与工业测量国家测绘地理信息局重点实验室开放基金(PF2011-3)

作者简介:张鹏,男,博士,讲师。研究方向为室内定位、软件接收机、传感器网络、压缩感知。E-mail: pzhang@sgg.whu.edu.cn

样。但是多个窄带信号需要多路下变频和采样电路,这种“并行下变频”的采样结构尽管被广泛采用,但是成本和复杂度较高,而且缺乏灵活性。理论上采用“带通采样”的方式能够以较低的采样率同时将多个频段的信号下变频到基带,但是“带通采样”对信号的频谱分布有较为苛刻的要求,而且需要和高性能的抗混叠滤波器配合使用。“非均匀采样”也是一种适用于多频段宽带信号的采样方法^[1],但是“非均匀采样”要求维持精确的时间偏移,这也大大限制了该方法在实际中的应用。

近年来,压缩感知理论^[2]为多频段宽带信号的采集提供了一种新的思路。基于压缩感知理论的接收机充分利用了多频段宽带信号在频域上满足的稀疏性,能够以较低的采样率完成信号的采样和重建,降低信号采集和传输成本^[3]。“随机解调”是一种基于压缩感知理论的接收机框架,针对在频域上满足稀疏性的多频段宽带信号,“随机解调”接收机只采用一套采样电路就能够在不了解信号频谱分布先验知识的条件下实现低速率采样,并通过重建算法恢复原始信号。文献[4]提出了一种由多路并行工作的“随机解调”电路组成的“Xampling”方案,能够以较小的计算量达到比“随机解调”更好的信号重建性能,但是代价是硬件电路复杂性大大提高。

近年来,针对压缩感知理论的研究逐渐从理论走向实际的应用,许多研究人员都提出要充分挖掘和利用信号的内在结构^[5,6]。而当前针对“随机解调”接收机的研究基本上都假设信号频谱的分布未知。这样做的好处是适用面广,特别是能够在频谱感知等特殊领域发挥重要作用,但代价是复杂度较高,限制了在实际中的应用。通常情况下,多频段宽带信号的频谱不仅满足稀疏分布的条件,而且分布范围预先已知,比如 GPS 信号 L1 和 L2 频段的频点分别是 1 575.42 MHz 和 1 227.60 MHz,信号占用的带宽为 2.046 MHz 和 1.023 MHz。本文在“随机解调”接收机框架的基础上,利用多频段宽带信号频谱分布的先验知识,对信号重建环节进行简化,并提出了逆矩阵重建算法。仿真结果表明,无论信号重建的复杂度还是重建误差,都有了显著降低。

2 信号模型

设 $f(t)$ 为原始的多频段宽带信号,在多个窄带频段的频域上的分布满足稀疏性。当 $f(t)$ 为周期信号时,可以表示为一系列正弦波的线性叠加。但由于实际信号通常由近似随机的数据经正弦波调制后得到,不满足周期性的条件。通过对 $f(t)$ 进行分段处理^[7],借助离散傅立叶变换,该段 $f(t)$ 信号也能

够被近似表示成正弦波的线性叠加,并可以用其离散形式 x_n 替代,如

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} s_k e^{-j2\pi kn} \quad (1)$$

按照惯例,将式(1)表示为 $\mathbf{x}_{N \times 1} = \boldsymbol{\Psi}_{N \times N} \mathbf{s}_{N \times 1}$ 的矩阵形式。其中 $\boldsymbol{\Psi}_{N \times N}$ 由元素 $e^{-j2\pi kn}$ 组成,代表离散傅立叶正交基, n 的取值范围为从 1 至 N 。而向量 $\mathbf{s}_{N \times 1}$ 代表 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 在每路正交基上的投影分量。尽管 $\mathbf{s}_{N \times 1}$ 的维数为 N ,但根据假设,原始信号的多个频段在频域上满足稀疏性,所以 $\mathbf{s}_{N \times 1}$ 中只有最多 K 个非零元素,且 $K \ll N$ 。也可以理解为尽管信号 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 可以被分解为 N 个正弦波的线性组合,但只有 K 个正弦波具有有效能量。

3 随机解调

“随机解调”接收机的原理框图如图 1 所示^[3]。原始信号 $f(t)$ 表示为其离散形式 x_n 。

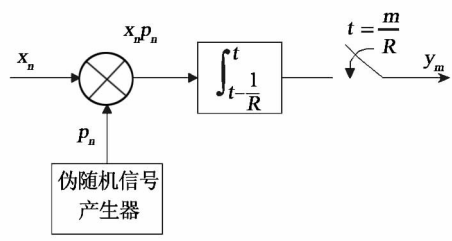


图 1 “随机解调”框图

Fig. 1 Block diagram of random demodulator

输入信号 x_n 首先与本地的随机信号产生器输出的伪随机序列 p_n 相乘, p_n 由随机变化的 $+1$ 和 -1 组成。后续的积分器实现低通滤波,并以采样率 R 完成采样。由于多频段宽带信号 x_n 在频域满足稀疏特性,那么依据压缩感知理论^[2],采样率 R 可以远小于信号对应的奈奎斯特采样率。

原始信号 $f(t)$ 的离散表示形式 x_n 的维数为 N ,但最终得到的采样数据 y_m 的维数为 M ,且 $M < N$ 。因此,“随机解调”接收机本质上还实现了一个因子为 $\rho = M/N$ 的减采样过程。

根据以上分析,整个“随机解调”接收机框架可以借助于矩阵形式表示为 $\mathbf{y}_{M \times 1} = \mathbf{H}_{M \times N} \mathbf{D}_{N \times N} \mathbf{x}_{N \times 1}$,其中矩阵 $\mathbf{D}_{N \times N}$ 称为伪随机矩阵,

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_N \end{bmatrix}_{N \times N} \quad (2)$$

$\mathbf{D}_{N \times N} \mathbf{x}_{N \times 1}$ 实现了输入数据 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 的伪随机化。而矩阵 $\mathbf{H}_{M \times N}$ 与 $\mathbf{D}_{N \times N} \mathbf{x}_{N \times 1}$ 相乘得到的是维数为 M 的信号 $\mathbf{y}_{M \times 1}$,实现了减采样的功能, $\mathbf{H}_{M \times N}$ 如式(3)所

示,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{\rho} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{1 \cdots 1}_{\rho} \end{bmatrix}_{M \times N} \quad (3)$$

令 $\Phi_{M \times N} = \mathbf{H}_{M \times N} \mathbf{D}_{M \times N}$, $\Phi_{M \times N}$ 相当于压缩感知理论中的随机测量矩阵^[2],

$$\Phi = \begin{bmatrix} \overbrace{p_1 \cdots p_{\rho}}^{\rho} & & \\ & \ddots & \\ & & \underbrace{p_{(M-1)\rho+1} \cdots p_N}_{\rho} \end{bmatrix}_{M \times N} \quad (4)$$

$\mathbf{y}_{M \times 1} = \mathbf{H}_{M \times N} \mathbf{D}_{N \times N} \mathbf{x}_{N \times 1}$ 可以被简化为 $\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \mathbf{x}_{N \times 1}$, 再将 $\mathbf{x}_{N \times 1} = \Psi_{N \times N} \mathbf{s}_{N \times 1}$ 代入, 可得

$$\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \Psi_{N \times N} \mathbf{s}_{N \times 1} \quad (5)$$

式(5)是标准的压缩感知问题表达式, 不仅 $\Phi_{M \times N}$ 具备限制等距特性^[3], 而且 $\mathbf{s}_{N \times 1}$ 满足稀疏性条件。可以通过求解 l_1 范数最小化的凸优化方法(以下简称凸优化重建算法)或贪婪算法, 根据低维采样数据 $\mathbf{y}_{M \times 1}$ 求解高维信号 $\mathbf{s}_{N \times 1}$ ^[2], 进而根据 $\mathbf{x}_{N \times 1} = \Psi_{N \times N} \mathbf{s}_{N \times 1}$ 重建原始信号 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 。由于凸优化重建算法效果更好, 所以我们重点介绍采用凸优化重建算法的信号重建过程^[2]:

$$\hat{\mathbf{s}} = \arg \min \|\mathbf{s}'\|_l \text{ s.t. } \Phi_{M \times N} \mathbf{s}'_{N \times 1} = \mathbf{y}_{M \times 1} \quad (6)$$

式中, $\Phi_{M \times N} = \Phi_{M \times N} \Psi_{N \times N} \circ$

由于 $M < N$, 所以矩阵 $\Phi_{M \times N}$ 为不适定病态矩阵, 求解的复杂度很高。而且凸优化重建算法是一种近似的计算, 会带来额外误差。

4 逆矩阵重建算法

由于“随机解调”接收机假设信号频谱的分布未知。尝试利用多频段宽带信号频谱分布的先验信息, 将非适定矩阵 $\Phi_{M \times N}$ 变换为可逆的方阵 $\Theta'_{M \times M}$, 将采用凸优化重建算法求解非适定性问题转化为求解方阵逆矩阵的适定性问题, 具体推导步骤为:

设 $\mathbf{y}_{M \times 1} = \Phi_{M \times N} \mathbf{s}_{N \times 1}$ 可以展开为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1K} & \cdots & \theta_{1M} & \cdots & \theta_{1N} \\ \theta_{21} & \cdots & \theta_{2K} & \cdots & \theta_{2M} & \cdots & \theta_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{M1} & \cdots & \theta_{MK} & \cdots & \theta_{MM} & \cdots & \theta_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_K \\ \vdots \\ s_M \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_K \\ \vdots \\ s_M \\ \vdots \\ s_N \end{bmatrix} \quad (7)$$

理论上 $\mathbf{s}_{N \times 1}$ 中的 K 个非零元素可以分布在任意

位置, 但为了叙述方便, 假设 $\mathbf{s}_{N \times 1}$ 中的前 K 个元素为非零元素, 即 $s_i = 0, i = K+1, \cdots, M, \cdots, N$ 。对于其他的组合形式, 可以很容易的推导出来。式(7)可以改写为:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^M \theta_{1i} s_i + \sum_{i=M+1}^N \theta_{1i} s_i \\ \sum_{i=1}^M \theta_{2i} s_i + \sum_{i=M+1}^N \theta_{2i} s_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^M \theta_{Mi} s_i + \sum_{i=M+1}^N \theta_{Mi} s_i \end{bmatrix} \quad (8)$$

由于 $s_i = 0, i = K+1, \cdots, M, \cdots, N$, 式(8)可以化简并展开为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \cdots & \theta_{1K} & \cdots & \theta_{1M} \\ \theta_{21} & \cdots & \theta_{2K} & \cdots & \theta_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{M1} & \cdots & \theta_{MK} & \cdots & \theta_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_K \\ \vdots \\ s_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_K \\ \vdots \\ s_M \end{bmatrix} \quad (9)$$

仍然将式(9)采用矩阵的形式表示为 $\mathbf{y}_{M \times 1} = \Theta'_{M \times M} \mathbf{s}_{M \times 1}$ 。由于 $\Theta'_{M \times M}$ 为方阵, 向量 $\mathbf{s}_{M \times 1}$ 可以通过求逆矩阵 $\mathbf{s}_{M \times 1} = \Theta'^{-1}_{M \times M} \mathbf{y}_{M \times 1}$ 的方式直接求解。一旦求出了向量 $\mathbf{s}_{N \times 1}$, 就可以通过在相应位置填充 0 得到原始向量 $\mathbf{s}_{N \times 1}$, 并通过 $\mathbf{x}_{N \times 1} = \Psi_{N \times N} \mathbf{s}_{N \times 1}$ 计算出原始信号的离散表达式 $\mathbf{x}_{N \times 1}$ 。

5 仿真实验

采用 Matlab 作为仿真工具, 原始输入信号,

$$f(x) = d_1(t) \cos 2\pi f_1 t + d_2(t) \cos 2\pi f_2 t$$

式中, $d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 分别为码率为 8 bps 的随机数据, 而 f_1 和 f_2 分别是频率为 70 Hz 和 340 Hz 的正弦波。依照惯例^[7], 将 $f(x)$ 按 1 s 的时间段进行分割, 并将每段 $f(x)$ 信号等效为离散表示形式 x_n, x_n 包含 800 个样点。图 2 绘出了信号 x_n 经过滤波后的频谱图, 由于离散傅里叶变换的特性, 只有位于 70 Hz 和 340 Hz 的两个频段是有效频段, 而第三、四个频段则是前两个频段的镜像。从图 2 中也可以看出该信号在频域上具有明显的稀疏特性, 满足使用压缩感知理论的条件。为了客观地对比逆矩阵重建算法和凸优化重建算法的性能, 选择求解优化问题的 CVX 工具包求解凸优化重建问题, 而逆矩阵重建算法的求解则直接由 Matlab 完成。

在仿真过程中, 由两个窄带信号构成的宽带信号的瞬时带宽达到了近 300 Hz。如果采用传统的采样方法, 需要的采样率至少应该为近 600 采样点/s, 才能够基本准确地重建信号。而在随机解调框架下, 当采样率为 160 Hz 的情况下, 就已经能够完成

信号的重建(图 3、4)。

从重建效果图(图 3、4)可以看出,采用逆矩阵重建算法可以较完美地重建原始信号,而采用凸优化重建算法有较大的重建误差。因为凸优化重建算法本质上是近似计算,而逆矩阵方法则充分利用了先验的频谱分布知识,消除了不确定性,不会引入额外误差,能够获得更好的重建效果。

另一方面,采用凸优化重建算法效果不佳也与

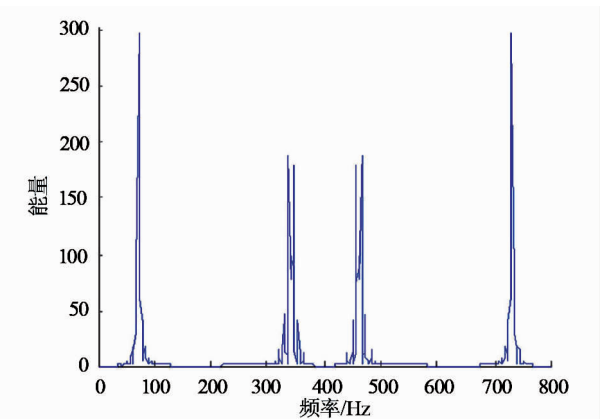


图 2 信号的频谱分布

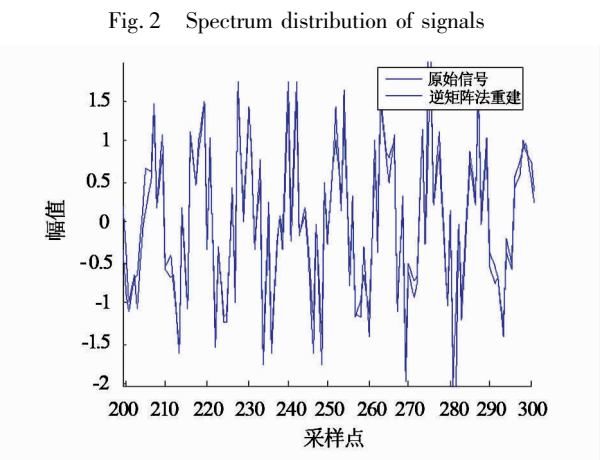


图 3 逆矩阵算法重建效果

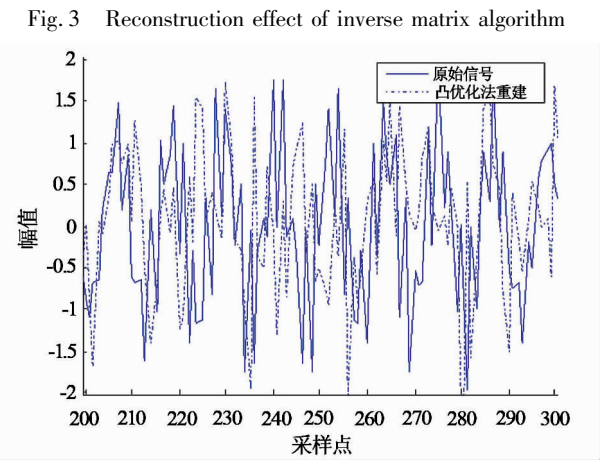


图 4 凸优化算法重建效果

Fig. 4 Reconstruction effect of convex algorithm

选择的输入信号是随机信号有关。为了验证这一点,我们去除掉中调制的随机信号,只发送由频率为 70 Hz 和 340 Hz 的正弦波叠加而成的信号。此时无论是凸优化重建算法,还是逆矩阵重建算法,都可以完美地实现信号重建(图 5、6)。

因为此时的信号满足周期性的条件,而且在频域中只有 70 Hz 和 340 Hz 两个有效频率,具有更加完美的频域稀疏性。需要说明的是,为了保持前后一致,我们只选择了由两个频率正弦波组成的信号,而对于更复杂的周期信号,也有类似的效果。

“随机解调”接收机只采用一套采样电路,能够在不了解信号频谱分布信息的情况下完成宽带多频段信号的低速率采样和信号重建。“随机解调”接收机对于周期信号能够很好的完成信号重建,但是重建复杂度较大,而且对于不满足周期性条件的多频段宽带信号,会带来较大的重建误差,难以在实际中使用。而逆矩阵重建算法可以视为对“随机解调”接收机的改进,不仅计算量小,而且不论是对周期信号还是非周期信号,都能够获得更好的信号重

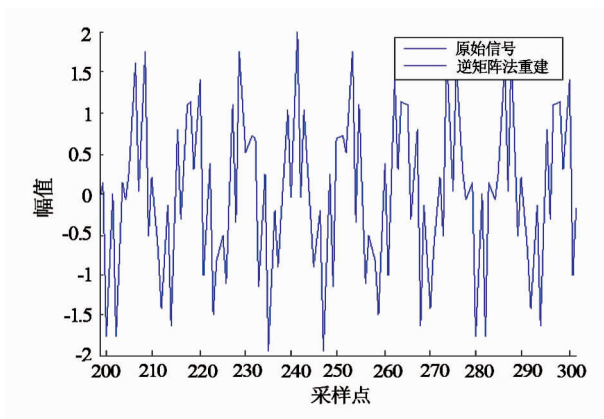


图 5 逆矩阵法重建效果(未调制数据)

Fig. 5 Reconstruction effect of inverse matrix algorithm (without modulated data)

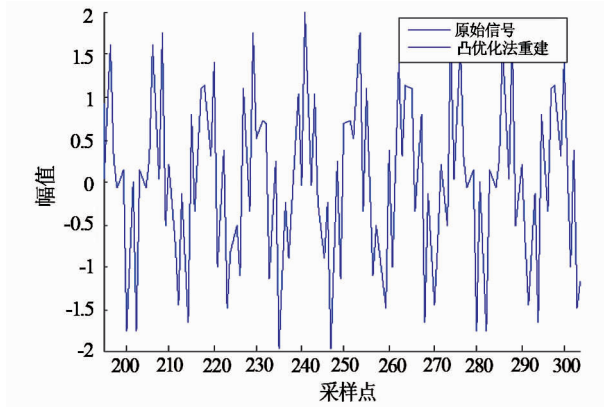


图 6 凸优化算法重建效果(未调制数据)

Fig. 6 Reconstruction effect of convex algorithm (without modulated data)

建效果,但是前提是必须具备信号频带分布的先验知识。

6 结论

介绍了采用随机解调方法来实现低采样率下的多频段稀疏信号的重建过程,并重点研究了逆矩阵重建算法。核心思想是利用满足频域稀疏性条件的多频段宽带信号的频谱分布先验信息,将采用凸优化重建算法求解非适定病态矩阵的问题转换为确定性方阵求逆矩阵的问题。实验结果证明,该方法不仅降低了复杂度,而且也显著提高了重建信号的精确度。为了表述清楚,本文的仿真主要选择了较为简单的信号结构。在后续研究中,会选择贴近实际的信号,并针对在不同噪声影响下的重建算法性能进行更深入的研究。

参 考 文 献

1 Raman Venkataramani and Yoram Bresler. Optimal sub-nyquist nonuniform sampling and reconstruction for multi-band signals[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2001, 49(10): 2 301 – 2 313.

2 Candes E J and Wakin M B. An introduction to compressive sampling[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2008, 25(2): 21 – 30.

3 Tropp J A et al. Beyond nyquist efficient sampling of sparse bandlimited signals [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2009, 56(4): 520 – 544.

4 Moshe Mishali and Yonina C. Eldar. from theory to practice sub-nyquist sampling of sparse wideband analog signals[J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2010, 4(2): 375 – 391.

5 Richard G, et al. Model-based compressive sensing[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(4): 1 982 – 2 001.

6 Marco F Duarte and Yonina C Eldar. Structured compressed sensing: from theory to applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(9): 4 053 – 40 85.

7 Davenport M A, et al. The pros and cons of compressive sensing for wideband signal acquisition: Noise folding versus dynamic range[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(9): 4 628 – 4 642.

(上接第 92 页)

3 张毅,闫利,崔晨风. 地面三维激光扫描技术在公路建模中的应用[J]. 测绘科学, 2008, 9(5): 100 – 102. (Zhang Yi, Yan Li and Cui Chenfeng. Application of terrestrial 3D laser scanning to highway modeling[J]. Science of Surveying and Mapping, 2008, 9(5): 100 – 102)

4 官云兰,程效军,施贵刚. 一种稳健的点云数据平面拟合方法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2008, 7(7): 981 – 984. (Guan Yunlan, Cheng Xiaojun and Shi Guigang. A robust method for fitting a plane to point clouds[J]. Journal of TONGJI University (Nature Science), 2008, 7(7): 981 – 984)

5 潘国荣,等. 三维激光扫描拟合平面自动提取算法[J]. 同济大学学报(自然科学版), 2009, 9(9): 1 250 – 1 255. (Pan Guorong, et al. Fitted plane automatic extraction algorithm of 3 – D laser scanning[J]. Journal of Tongji University (Nature Science), 2009, 9(9): 1 250 – 1 255)

6 蔡来良,吴侃,张舒. 点云平面拟合在三维激光扫描仪变

形监测中的应用[J]. 测绘科学, 2010, 9(5): 231 – 232. (Cai Lailiang, Wu Kan and Zhang Shu. Application of point cloud plan fitting to deformation monitoring using 3D laser scanner[J]. Science of Surveying and Mapping, 2010, 9(5): 231 – 232)

7 丁旭,等. 基于 Cook 距离的 GPS 高程拟合点优选[J]. 科技创新导报, 2010, (20): 81 – 82. (Din Xu, et al. GPS elevation fitting point optimization based on cook distance [J]. Science and Technology Innovation Herald, 2010, (20): 81 – 82)

8 R Dennis Cook. Detection of influential observations in linear regression[J]. Technometrics, 1997, 2(1): 15 – 18.

9 田保光. 最小二乘估计中的 Cook 距离与相关系数[J]. 贵州师范大学学报(自然科学版), 1993, (2): 10 – 15. (Tian Baoguang. Cook Distance and Correlation Coefficient in Least Square Estimator[J]. Journal of Guizhou Normal University (Natural Science), 1993, (2): 10 – 15)