

双基线姿态确定三种算法的比较分析*

刘晓辉¹⁾ 党亚民¹⁾ 王潜心¹⁾ 杨磊²⁾

(1) 中国测绘科学研究院, 北京 100830
(2) 山东科技大学, 青岛 266510

摘要 利用仿真数据,通过对三种算法在不同情况下解算姿态角精度、代价函数和计算耗时的分析发现,优化 TRIAD 算法和 QUEST 算法解算结果完全相同,代价函数随着两基线精度比的降低而减小,姿态角精度与代价函数变化规律不一致,TRIAD 算法耗时最少。

关键词 TRIAD; 优化 TRIAD; QUEST; 定姿; 代价函数

中图分类号: P207

文献标识码: A

ANALYSIS OF THERE ALGORITHMS OF ATTITUDE DETERMINATION BASED ON TWO BASELINES

Liu Xiaohui¹⁾, Dang Yamin¹⁾, Wang Qianxin¹⁾ and Yang Lei²⁾

(1) *Chinese Academy of Surveying and Mapping, Beijing 100830*
(2) *Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510*

Abstract This paper introduces the concept of attitude determination, the method for attitude expression and means of attitude determination, and then attitude determination algorithms based on two baselines are presented. In order to investigate the calculating quality with the three algorithms in different conditions, the simulation data is divided into eight cases on the basis of ratio precision of the two baselines. Through the analysis of the computation accuracy of the attitude angles, the cost function and the computation time with the three algorithms in different cases, we found out that the computation results with the optimized TRIAD algorithm and the QUEST algorithm are exactly the same, the cost function decreases with the reduction of precision ratio of the two baselines, the precision of attitude angle is inconsistent with the variation of the cost function, the computation time with TRIAD algorithm is less than those with the other two algorithms.

Key words: TRIAD; optimized TRIAD; QUEST; attitude determination; cost function

1 引言

所谓定姿,就是确定载体坐标系与参考坐标系的相对关系。在航空、航天、航海和陆地导航任务中,都需要准确测定载体的姿态信息。目前用于测定姿态的传感器主要有陀螺仪、星敏感器、太阳敏感

器、磁力计和全球定位系统(GNSS)等。

通常将确定三轴姿态的算法分为两类:确定性算法和最优化算法^[1]。目前最好的确定性算法是 TRIAD 算法^[2],但该算法只能利用两个观测矢量的信息,不是最优算法且有主轴敏感性。黎湧等人^[4]于 2000 年提出一种融合 TRIAD 算法,他们利

* 收稿日期:2012-07-03

基金项目:中国测绘科学研究院基本业务费(7771214);国家自然科学基金(41104018);国家 863 计划项目(2009AA121405)

作者简介:刘晓辉,男,1987 年生,研究生,主要从事 GPS 定位定姿方面的研究。E-mail:0512106346@163.com

用两个观测矢量的和与差构造正交矢量从而消除了主轴敏感性,并且对姿态角而不是对姿态矩阵进行加权从而省去了矩阵的正交化过程。最优化解法就是寻找使建立的代价函数最小的姿态矩阵,也就是 Wahba 问题^[5],这一问题直到 QUEST 算法^[6]提出才得以完满解决。但是 QUEST 方法需要求解特征值和特征向量,计算过程复杂、耗时长,对计算机要求较高。在双基线定姿的实际应用中,有时需要较高的姿态更新率,有时需要程序计算简单,有时需要较高的定姿精度,究竟该选择哪种算法才能满足需要,本文将对这一问题进行研究。

2 双基线定姿算法

2.1 TRIAD 算法

已知参考坐标系下两条非平行单位矢量为 \mathbf{W}_1 和 \mathbf{W}_2 ,它们在载体坐标系下对应的单位矢量为 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 。

在参考坐标系下构造三条正交的单位矢量:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{r}_2 = (\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2) / |\mathbf{W}_1 \mathbf{W}_2| \\ \mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \end{cases} \quad (1)$$

在载体坐标系下构造三条正交单位矢量:

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{b}_2 = (\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2) / |\mathbf{V}_1 \mathbf{V}_2| \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \end{cases} \quad (2)$$

利用单位正交矢量构造单位正交阵:

$$\mathbf{M}_R = [\mathbf{r}_1 \quad \mathbf{r}_2 \quad \mathbf{r}_3], \mathbf{M}_B = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_3] \\ \text{由 } \mathbf{M}_B = \mathbf{A} \mathbf{M}_R \text{ 得: } \mathbf{A} = \mathbf{M}_B \mathbf{M}_R^T \quad (3)$$

式中 \mathbf{A} 为姿态矩阵。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\gamma + \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & -\sin\alpha\cos\beta \\ \cos\beta\cos\gamma & \sin\beta & -\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

式中 α 为横滚角, β 为俯仰角, γ 为航向角。

2.2 优化 TRIAD 算法

一般情况下,第一个观测矢量和第二个观测矢量测量精度不同。该方法就是分别用第一和第二个观测矢量作为主矢量构造正交阵,得到两个姿态矩阵,然后再对这两个矩阵进行加权平均,最后对得到的矩阵进行正交化。具体解算步骤如下:

以 \mathbf{W}_1 和 \mathbf{V}_1 作为主矢量求得的态度矩阵为 \mathbf{A}_1 , 方差为 σ_1^2 ;以 \mathbf{W}_2 和 \mathbf{V}_2 为主矢量求得的态度矩阵为

\mathbf{A}_2 , 方差为 σ_2^2 。

$$\mathbf{A}' = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \mathbf{A}_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \mathbf{A}_2 \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = 0.5 [\mathbf{A}' + (\mathbf{A}'^{-1})^T] \quad (5)$$

式(5)是对 \mathbf{A}' 的正交化^[3]。矩阵 \mathbf{A} 即为最后要得到的姿态矩阵。

2.3 Quest 算法

设代价函数定义为:

$$L(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i |\hat{\mathbf{W}}_i - \mathbf{A} \hat{\mathbf{V}}_i|^2 \quad (6)$$

式中, $a_i = (\sum_{i=1}^n \sigma_i^{-2})^{-1} / \sigma_i^2$, a_i 满足 $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ 。

最优化算法是寻找最优的正交姿态矩阵 \mathbf{A}_{opt} 使 $L(\mathbf{A})$ 最小, Quest 算法把问题转化为寻找最优四元数,然后根据四元数和姿态矩阵的关系求得姿态角,四元数与姿态矩阵的关系为:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_2 + q_3 q_4) & 2(q_1 q_3 - q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 + q_1 q_4) \\ 2(q_1 q_2 - q_3 q_4) & -q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 + q_4^2 & 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \\ 2(q_1 q_3 + q_2 q_4) & 2(q_2 q_3 - q_1 q_4) & -q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 \end{bmatrix}$$

定义函数

$$g(\mathbf{A}) = 1 - L(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_i \hat{\mathbf{W}}_i^T \mathbf{A} \hat{\mathbf{V}}_i = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) \quad (7)$$

式中, $\mathbf{B} = \sum_{i=1}^n a_i \hat{\mathbf{W}}_i^T \hat{\mathbf{V}}_i$ 。当 $g(\mathbf{A})$ 取最大值时 $L(\mathbf{A})$ 取最小值,现在问题转化为求得使 $g(\mathbf{A})$ 最大的 \mathbf{A}_{opt} 。

载体运动后的姿态可以看作是绕旋转轴转动一定的角度得到的,旋转轴所指方向的单位矢量用 \mathbf{n} 表示,转动的角度用 θ 表示。

用四元数 \mathbf{q} 表示绕 \mathbf{n} 旋转 θ 角的表达式为:

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \sin(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中 \mathbf{q} 满足 $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$ 。

函数 $g(\mathbf{A})$ 可以表示成关于四元数 \mathbf{q} 的二次型函数:

$$g(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (9)$$

式中, $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} + \mathbf{B}^T - (\text{tr} \mathbf{B}) \mathbf{I} & \mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}^T & \text{tr} \mathbf{B} \end{bmatrix}$, $\mathbf{Z} = \sum_{i=1}^n a_i (\hat{\mathbf{W}}_i \hat{\mathbf{V}}_i)$ 。

考虑到约束条件 $q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 = 1$, 通过拉格朗日乘子算法可以证明最优四元数 \mathbf{q}_{opt} 即为矩阵 \mathbf{K} 的最大特征值对应的特征向量^[6]。

3 试验分析

分别用 TRIAD 方法、优化 TRIAD 方法、QUEST

方法对不同的仿真双基线数据进行处理,然后对各种方法的计算精度、计算耗时、代价函数进行分析。

选取载体坐标系下的基线 W_1 和 W_2 如下:

$$W_1 = [0.498\ 9\ \ 0.635\ 0\ \ 0.589\ 7]^T$$
$$W_2 = [0.064\ 2\ \ -0.705\ 7\ \ 0.705\ 7]^T$$

姿态矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 0.444\ 4 & 0.777\ 8 & -0.444\ 4 \\ 0.111\ 1 & 0.444\ 4 & 0.888\ 9 \\ 0.888\ 9 & -0.444\ 4 & 0.111\ 1 \end{bmatrix}$$

如果没有误差,则 V_1 和 V_2 为:

$$V_1 = [0.816\ 5\ \ 0.408\ 2\ \ 0.408\ 2]^T$$
$$V_2 = [0.577\ 4\ \ -0.577\ 4\ \ -0.577\ 4]^T$$

由于传感器观测存在误差,假设基线误差服从零均值高斯分布,根据基线精度和姿态角精度的关系^[7],并参考实际测量中姿态角的测量精度,在 V_1 中加入均值为零、方差 σ_1^2 为 0.000 1 m² 的随机白噪声,根据第二条基线和第一条基线的精度比 $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 40、20、10、5、1、0.2、0.1、0.05$ 在 V_2 中分别加入 8 种均值

为零、方差为 σ_2^2 的随机白噪声。对每种情况进行 100 次仿真,利用三种方法针对每种情况的 100 个仿真数据计算出 100 个解算结果(图 1)。

从图 1 可以看出,利用优化 TRIAD 方法和 QUEST 方法计算得到的航向角完全相同。随着 σ_2^2/σ_1^2

σ_1^2 的减小,用优化 TRIAD 方法和 QUEST 方法计算的优势越来越明显(1)。

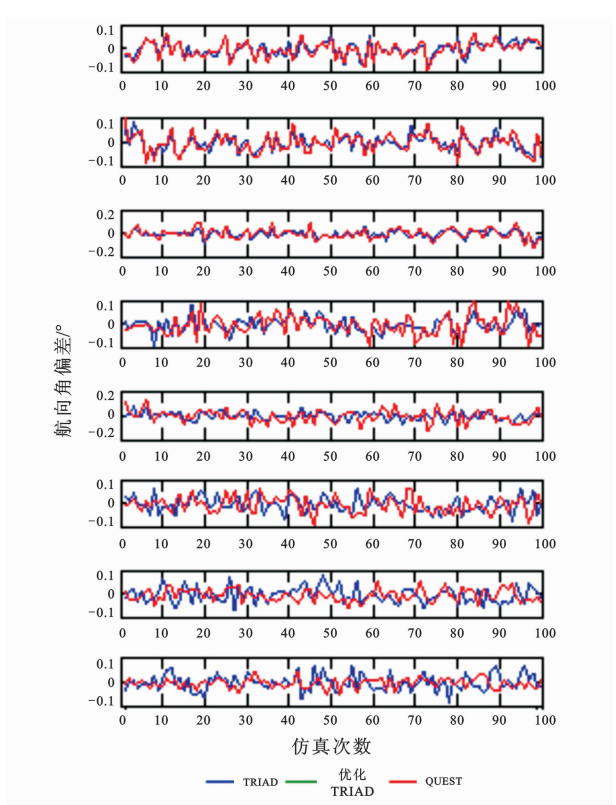


图 1 三种方法得到的航向角偏差
Fig. 1 Heading angle deviation with the three algorithms

表 1 姿态角标准差信息(单位:°)

Tab. 1 Standard deviation of attitude angles(unit:°)

σ_2^2/σ_1^2	TRIAD			优化 TRIAD			QUEST		
	航向角	俯仰角	翻滚角	航向角	俯仰角	翻滚角	航向角	俯仰角	翻滚角
40	0.032 6	0.232 5	0.219 9	0.033 1	0.234 1	0.221 5	0.033 1	0.234 1	0.221 5
20	0.032 5	0.230 4	0.217 9	0.038 4	0.271 4	0.256 7	0.038 4	0.271 4	0.256 7
10	0.032 6	0.232 4	0.219 8	0.042 3	0.299 6	0.283 3	0.042 3	0.299 6	0.283 3
5	0.032 5	0.231 4	0.218 8	0.042 4	0.300 5	0.284 2	0.042 4	0.300 5	0.284 2
1	0.032 5	0.230 7	0.218 1	0.049 8	0.354 6	0.335 4	0.049 8	0.354 6	0.335 4
0.2	0.032 5	0.230 7	0.218 2	0.034 7	0.244 2	0.231 0	0.034 7	0.244 2	0.231 0
0.1	0.032 5	0.230 1	0.217 5	0.026 7	0.185 7	0.175 6	0.026 7	0.185 7	0.175 6
0.05	0.032 5	0.230 3	0.217 8	0.020 5	0.139 1	0.131 6	0.020 5	0.139 1	0.131 6

通过对三种方法进行比较可以看出:优化 TRIAD 方法和 QUEST 方法计算得到的航向角、俯仰角和翻滚角的精度完全相同, σ_2^2/σ_1^2 值为 0.1 和 0.05 时利用优化 TRIAD 和 QUEST 方法得到的姿态角精度比 TRIAD 方法高;利用 TRIAD 方法得到的姿态角精度随 σ_2^2/σ_1^2 的增大而减小,这是因为主基线的

精度不变,而第二条基线的精度不断增高,因此总体上精度不断增高;而优化 TRIAD 和 QUEST 方法得到的姿态角精度从 $\sigma_2^2/\sigma_1^2 = 1$ 向两边递减,并且向 σ_2^2/σ_1^2 减小的方向递减的速度明显高于 σ_2^2/σ_1^2 增大的方向的递减速度。

三种方法在不同 σ_2^2/σ_1^2 下的代价函数见图 2,

代价函数平均值见表 2。对三种方法代价函数进行比较可以看出:优化 TRIAD 和 QUEST 方法的代价函数完全相同,比 TRIAD 方法的小,并且当 σ_2^2/σ_1^2 很大(如 40)时优化 TRIAD、QUEST 方法和 TRIAD 算法的代价函数相差很小(0.01)。通过观察三种方法各自代价函数变化趋势可以发现,三种方法的代价函数都随着 σ_2^2/σ_1^2 的减小而减小。

这三种方法在不同 σ_2^2/σ_1^2 时计算消耗时间见表 3。从图 2 可以看出,TRIAD 算法消耗时间最短,QUEST 算法次之,优化 TRIAD 算法消耗的时间最长,接近 TRIAD 算法的两倍。

从以上结果可以看出,随着 σ_2^2/σ_1^2 的减小,三种方法的代价函数都不断减小,并且优化 TRIAD 算法和 QUEST 算法的代价函数都比 TRIAD 算法小。但是优化 TRIAD 算法和 QUEST 算法解算姿态角的精度在很多情况下都比 TRIAD 算法低。当 σ_2^2/σ_1^2 很大时,TRIAD 算法与优化 TRIAD 算法和 QUEST 算法解算得到的姿态角精度相差不大,它们的代价函数相差也很小,并且 TRIAD 方法计算简单,而优化 TRIAD 计算时间长、QUEST 方法由于涉及特征值和特征向量计算对程序要求较高,因此对于那些姿态更新率高,需要实时在线解算姿态的任务,TRIAD

方法是最好的选择。考虑到计算精度和计算耗时,当 σ_2^2/σ_1^2 小于 1 时,QUEST 方法是最好的选择。

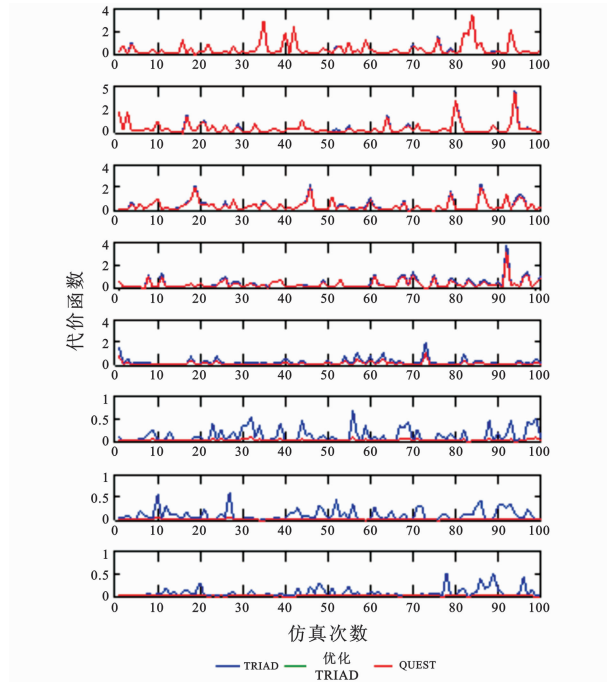


图 2 不同精度比下三种方法的代价函数比较
Fig.2 Comparison among the three algorithms in different precision ratio

表 2 代价函数平均值
Tab.2 Mean values of cost function

方法	σ_2^2/σ_1^2							
	40	20	10	5	1	0.2	0.1	0.05
TRIAD	0.414 3	0.406 5	0.384 3	0.376 7	0.231 3	0.123 9	0.102 4	0.074 5
优化 TRIAD	0.404 3	0.387 3	0.349 5	0.314 0	0.115 7	0.020 7	0.009 3	0.003 6
QUEST	0.404 3	0.387 3	0.349 5	0.314 0	0.115 7	0.020 7	0.009 3	0.003 6

表 3 不同情况下三种方法的计算耗时(单位:s)
Tab.3 Computation time in different cases(unit: s)

方法	σ_2^2/σ_1^2							
	40	20	10	5	1	0.2	0.1	0.05
TRIAD	0.066 14	0.061 88	0.064 52	0.065 23	0.066 60	0.072 68	0.068 72	0.061 78
优化 TRIAD	0.114 78	0.127 69	0.118 90	0.122 79	0.125 54	0.129 07	0.124 13	0.121 03
QUEST	0.069 53	0.072 61	0.069 34	0.075 59	0.073 70	0.083 65	0.081 1	0.069 01

4 结论

- 1)利用两条基线进行姿态解算,优化 TRIAD 算法和 QUEST 算法得到的定姿结果完全相同;
- 2)当 σ_2^2/σ_1^2 很大时,利用 TRIAD 算法进行姿态

解算是最好的选择。因为该方法与其他方法相比计算过程简单,计算耗时少;

- 3)当 σ_2^2/σ_1^2 小于 1 时,QUEST 方法或优化 TRIAD 方法的姿态角精度和代价函数要远远优于 TRIAD 方法,因此,此时不能用 TRIAD 方法,要根据情

况选择 QUEST 或优化 TRIAD 方法,前者计算复杂,需要计算特征值和特征向量;后者计算相对简单,但是耗时太长;

4)姿态角解算精度与代价函数的变化规律不一致。

参 考 文 献

1 Malcolm D Shuster. Deterministic three-axis attitude determination[J]. The Journal of the Astronautical Science, 2004, 52(3):405-419.

2 BLACK H D. A passive system for determining the attitude of a satellite[J]. AIAA Journal, 1964, 2;1 350-1 351.

3 Itzhack Y Bar-Itzhack and Richard R Harman. Optimized TRIAD algorithm for attitude determination [J]. Journal of

Guidance, Control and Dynamics (S0731-5090), 1997, 20(1):208-211.

4 黎湧,吴宏鑫,刘良栋. 融合 TRIAD 算法用于 GPS 姿态确定[J]. 中国空间科学技术,2000, 4(2):30-36. (Integration of TRIAD algorithm for GPS attitude determination [J]. Space Science and Technology, 2000, 4(2):30-36)

5 WAHBA G. Problem 65-1: A Least Squares Estimate of Spacecraft Attitude[J]. SIAM Review, 1965,7(3): 409.

6 Shuster M D and OH S D. Three-axis attitude determination from vector observations[J]. Journal of Guidance and Control, 1981, 4(1):70-77.

7 Lu G. Development of a GPS multi-antenna system for attitude determination[D]. University of Calgary, Calgary , Canada, 1995.

《Geodesy and Geodynamics》约稿函

尊敬的作者:
您好!

近两年来,邻国缅甸先后发生 7.2 和 6.8 级地震。这两次地震发生在我国滇西地震试验场的南部,据有关资料显示,震前,云南地区有明显的地震前兆异常。

缅甸构造弧与滇西断裂构造同为印度-青藏板块共同作用的结果,对这两次地震进行深入全面的研究,不仅能使我们更加全面地了解印度-青藏两板块现今活动的特征,也可以使我们能进一步了解印度板块与青藏板块相互作用对其周边地震活动、构造活动的影响,以及对地震活动规律的认识。为此本刊诚挚地邀请您,请您将您的研究成果与世界地震学家交流共享。

这两次地震研究成果我们将以专辑形式出版发行。本专刊拟定于 2013 年第二期出版。投稿截止日期为 2013 年 3 月。

欢迎网上投稿。
网址:http://www.jgg09.com:8080/jweb_ddcl_en/EN/volumn/home.shtml
或 <http://www.jgg09.com> (中英文投审稿平台)

本刊不收取版面费和审稿费,英文请有专业背景的国际语言专家修改。稿件一经录用,即按 1500 元/篇的标准支付稿酬。

来稿请附中英文稿件各一份。格式请参照《Geodesy and Geodynamics》征稿启事。

另,近日,所罗门群岛发生 8.0 级地震,我们真诚地欢迎您将有关此次地震的研究成果投向本刊。

《Geodesy and Geodynamics》
编辑部
2013-02-06