文章编号:1671-5942(2007)05-0013-06

三轴刚性地球体的自由 Euler 运动*

申文斌[1,2)] 陈 巍[1)] 章 迪[3)] 王文均[4)] 梁毅强[1)]

(1)武汉大学测绘学院地球物理系,武汉 430079
2)武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,武汉 430079
3)武汉大学测绘学院大地测量学与测量工程系,武汉 430079
4)中国科学院测量与地球物理研究所动力大地测量学开放研究室,武汉 430077)

摘 要 在 Euclid 空间中,假定地球是一个作自由旋转的3个主惯性矩互不相等的刚体,给出了 Euler 动力学方程的椭圆积分解,并实现了 Euler 动力学方程和运动学方程的数值解。计算结果表明:除了周期约24小时的自转及周期为305天的 Euler 自由进动之外,还存在周期约305天的自由章动;3个 Euler 角速率在一半周期内增大,在另一半周期内减小,但保持总角速率不变,即转动能守恒。相应地,日长在一半周期内增长,在另一半周期内缩短。

关键词 三轴地球 自由 Euler 运动 椭圆积分解 角速率 转动能守恒

中图分类号:P312 **文献标识码**:A

FREE EULER MOTION OF TRIAXIAL RIGID EARTH

Shen Wenbin[1,2)], Chen Wei[1)], Zhang Di[3)], Wang Wenjun[4)] and Liang Yiqiang[1)]

(1) *Department of Geophysics, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan* 430079
2) *The Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan* 430079
3) *Department of Geodesy and Surveying Engineering, School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan* 430079
4) *Key Laboratory of Geophysical Dynamics, Institute of Geodesy and Geophysics, CAS, Wuhan* 430077)

Abstract Under the assumption that the Earth is a triaxial rigid body which is rotating freely in the Euclidian space, the elliptic integral solution of the Euler dynamic equation is provided, and then the numerical solutions of the Euler dynamic as well as kinetic equation are realized. The calculated results show that, besides the self-rotation of the Earth with the period about 24 h and the free Euler precession with the period 305 d, there exists a free nutation with the period about 305 d. In addition, the three Eulerian angular velocities accelerate in a half period and decelerate in another half period, keeping the magnitude of the total angular velocity constant, i. e., the rotational energy keeps invariant. Correspondingly, the length of day increases gradually in one half period and decreases gradually in another half period.

Key words: triaxial Earth, free Euler motion, elliptic integral solution, angular velocity, rotational energy conversetion

---

* **收稿日期**:2007-05-19
基金项目:国家自然科学基金(40574004)
作者简介:申文斌,博士,教授,博士生导师,主要从事地球物理、物理大地测量以及相对论大地测量方面的研究. E-mail:wbshen@sgg.whu.edu.cn

1 引言

地球旋转是地球相对于地心准惯性系的整体旋转运动。若将地球看作刚体，则其旋转可用 Euler 运动学方程和动力学方程描述，此时地球的运动状态可由 3 个 Euler 角（自转角 ψ，进动角 ϕ 和章动角 θ）确定。传统的做法是假定地球的两个主惯性矩 A 与 B 相等（旋转对称），而第三个主惯性矩 C 与 A 的差异大约是 $A/305$，即 $(C-A)/A = 1/305$。在此假定下，Poinsot 求解 Euler 方程得到如下结果：1）地球旋转角速度的第三个分量为常数；2）地球瞬时轴（瞬时旋转角速度方向轴）环绕平均轴（瞬时轴运动一个周期的平均方向轴）作周期为 305 天的 Euler 自由进动。

实际上，地球并非旋转对称体，3 个主惯性矩 A、B 和 C 互不相等 $(A<B<C)$[1~3]，且 C 与 A 的差值大约是 $0.003A$，B 与 A 的差值约为 $0.000\ 02A$。为简便计，将 A、B 和 C 互不相等的地球体称为三轴地球。三轴地球并非意味着三轴椭球，因为一个刚性地球（无论它的形状多么奇特）总有 3 个互相垂直的主惯性（矩）轴[4]，只要这些主惯性矩互不相等就是三轴地球。研究三轴地球无论是在理论上还是在实际应用中都有重要意义。

2 三轴刚体地球的旋转

选取具有公共原点 O 的惯性坐标系 $O-\zeta\eta\xi$ 和地固坐标系 $O-xyz$，则地球的 3 个 Euler 角 ψ、φ 和 θ（分别是自转、进动和章动角）满足 Euler 运动学方程[5,6]

$$\begin{cases}\omega_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi \\ \omega_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi \\ \omega_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi}\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\omega_i(i=1,2,3)$ 表示地球旋转的角速度沿着 $x^i(i=1,2,3;x^1=x,x^2=y,x^3=z)$ 轴的分量。若给定 ω_i，则可确定相应的 Euler 角；反过来，给定作为时间函数的 Euler 角，角速度分量也可确定。

另一方面，地球的旋转运动受到外力矩以及自身物质分布的制约，可由 Euler 动力学方程描述[5,7,8]

$$I^{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon^i_{jk}\omega^j I^{kl}\omega_l = L^i \tag{2}$$

其中 i、j、k 的取值分别为 1、2、3，I^{ij} 是二阶惯性矩张量，$L^i = L_i$ 是施加在地球上的外力矩，$\dot{\omega}_j$ 表示 ω_j 对时间 t 的导数，$\varepsilon^i_{jk} \equiv \varepsilon_{ijk}$ 是 Levi-Civita 符号（三阶完全反对称张量），满足以下条件：如果 ijk 是 123 的偶置换（如 123 或 312 等），$\varepsilon_{ijk}=1$；如果 ijk 是 123 的奇置换（如 213，321 等），$\varepsilon_{ijk}=-1$；其它情况，$\varepsilon_{ijk}=0$。注意本文采用了爱因斯坦求和约定[8,9]：当且仅当一个上标和一个下标相同时，表达式才从 1 到 3 求和（如 $A_iI^{ij} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_iI^{ij}$）。式（1）和（2）可描述任何刚体的旋转运动。

若在选取地固坐标系 $O-xyz$ 时，使 ox、oy、oz 分别与主惯性矩 A、B、C 的指向一致，则有 $I^{ij}=0(i\neq j)$。令

$$I^{11}=A, I^{22}=B, I^{33}=C; I^{ij}=0(i\neq j) \tag{3}$$

则式（2）可表示为

$$\begin{cases}A\dot{\omega}_1 - (B-C)\omega_2\omega_3 = L_1 \\ B\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_3\omega_1 = L_2 \\ C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2 = L_3\end{cases} \tag{4}$$

当考虑刚体地球的自由旋转（外力矩 $L=0$）时，式（4）可简化为

$$\begin{cases}A\dot{\omega}_1 - (B-C)\omega_2\omega_3 = 0 \\ B\dot{\omega}_2 - (C-A)\omega_3\omega_1 = 0 \\ C\dot{\omega}_3 - (A-B)\omega_1\omega_2 = 0\end{cases} \tag{5}$$

若令

$$\begin{cases}\alpha = \dfrac{C-B}{A} \\ \beta = \dfrac{C-A}{B} \\ \gamma = \dfrac{B-A}{C}\end{cases} \tag{6}$$

则式（5）可写成

$$\dot{\omega}_1 + \alpha\omega_2\omega_3 = 0 \tag{7}$$

$$\dot{\omega}_2 - \beta\omega_3\omega_1 = 0 \tag{8}$$

$$\dot{\omega}_3 + \gamma\omega_1\omega_2 = 0 \tag{9}$$

其中 $\alpha=(327\ 353\pm6)\times10^{-8}$，$\beta=(329\ 549\pm6)\times10^{-8}$，$\gamma=(2\ 196\pm6)\times10^{-8}$[1]。由式（7）、（8）和（9）可得

$$\beta\omega_1^2 + \alpha\omega_2^2 = C_{12} \tag{10}$$

$$\gamma\omega_2^2 + \beta\omega_3^2 = C_{23} \tag{11}$$

$$\alpha\omega_3^2 - \gamma\omega_1^2 = C_{31} \tag{12}$$

其中 C_{ij} 是待定常数。如若 $A=B$，则 $\gamma=0$，$\alpha=\beta$；此时，$\omega_3=\text{Const}$，$\omega_1^2+\omega_2^2=C_{12}/\alpha$ 是守恒量，回到了 Poinsot 情形。下面考虑 A、B、C 互不相等的情形[5,6]。

地球瞬时自转轴与平均轴之间的夹角在极区附近对应于 10 m 左右的弧长，因此地球的章动角约为 $\theta_0 = 10/6\ 371\ 000 = 1.5696\times10^{-6}$ rad，由此可以计算出旋转角速度在 3 个坐标轴上的分量（即角速度分别在 3 个坐标轴上的投影）。注意到第三个分量为 $\omega_3(0)=7.292\ 115\times10^{-5}$ rad/s（即自转

角速率，它反映了日长），而角速度的第一和第二分量则随时间交替变化（主要受 Euler 自由进动的制约）。不妨假定，在某个瞬时角速度位于 $o-xz$ 平面内，即其第二分量为零。于是，我们得到初值条件：$\omega_1(0)=\omega_3(0)\tan\theta_0=1.144\ 579\times10^{-10}$ rad/s，$\omega_2(0)=0$，$\omega_3(0)=7.292\ 115\times10^{-5}$ rad/s。基于方程(6)和（10）～（12），利用 Groten[1] 给出的 3 个主惯性矩，得

$$\begin{cases}C_{12}=\beta\omega_1^2(0)=4.317\ 296\times10^{-23}\\ C_{23}=\beta\omega_3^2(0)=1.752\ 375\times10^{-11}\\ C_{31}=\alpha\omega_3^2(0)-\gamma\omega_1^2(0)=1.740\ 698\times10^{-11}\end{cases}\tag{13}$$

由式（10）和（11），将 ω_1 和 ω_3 分别表示成 ω_2 的函数，代入方程（8），得

$$\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\mathrm{d}t}-\beta\sqrt{\frac{C_{23}-\gamma\omega_2^2}{\beta}}\sqrt{\frac{C_{12}-\alpha\omega_2^2}{\beta}}=0\tag{14}$$

解上述方程，得

$$\int_{\omega_2(0)}^{\omega 2(t)}\frac{\mathrm{d}\omega_2}{\sqrt{(C_{23}-\gamma\omega_2^2)(C_{12}-\alpha\omega_2^2)}}=t\tag{15}$$

令

$$x=\sqrt{\frac{\alpha}{C_{12}}}\omega_2\tag{16}$$

则有

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha C_{23}}}\int_{x(0)}^{x(t)}\frac{\mathrm{d}\arcsin x}{\sqrt{1-\dfrac{\gamma}{\alpha}\dfrac{C_{12}}{C_{23}}x^2}}=t\tag{17}$$

令

$$m=\frac{\gamma C_{12}}{\alpha C_{23}},\varphi=\arcsin x\tag{18}$$

则有

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha C_{23}}}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t)}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-m\sin^2\varphi}}=t\tag{19}$$

其中 $\varphi(0)=0$（因为 $\omega_2(0)=0$），$\omega_2(t)\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，且显然有 $0<m<1$。式（19）是第一类不完全椭圆积分，没有显式解。若给定一个序列 $\varphi_i(t)$，则通过式(19)可确定相应的时间序列 t_i，从而给出 $\varphi-t$ 曲线。注意到 $\omega_2=\sqrt{\dfrac{C_{12}}{\alpha}}\sin\varphi$，亦即给出了 ω_2-t 曲线。基于式（10）和（11），曲线 ω_1-t 和 ω_3-t 也得以确定。

3　数值结果与分析

采用数值法求解式（11）、(12）和（19），可得到 $\omega_i-t(i=1,2,3)$ 关系图（图 1）以及角速度各分量的主要信息（表 1）。结果表明：1）ω_1 和 ω_2 表现出约 305.147 992 天的周期性变化，它们之间的相位正好相差 $\pi/2$（对应于 305.147 992/4 天的周期），因此，它们的联合效应给出的一个结果实际上就是熟知的周期为 305.147 992 天的 Euler 自由进动（只要考察一下 $A=B$ 时的 Poinsot 情形即可看出）；2）如果 ω_3 保持恒定，则具有恒定的日常（约 24 小时）自转周期；但 ω_3 有一个周期为 152.573 996天的微小波动，表明地球自转在一半时间（152.573 996/2 = 76.286 998 天）加速，在另一半时间减速；3）如果 ω_3 保持恒定，则不存在章动；但由于 ω_3 的变化，将导致章动效应，这可根据 Euler 角的数值解看出（见下文）。

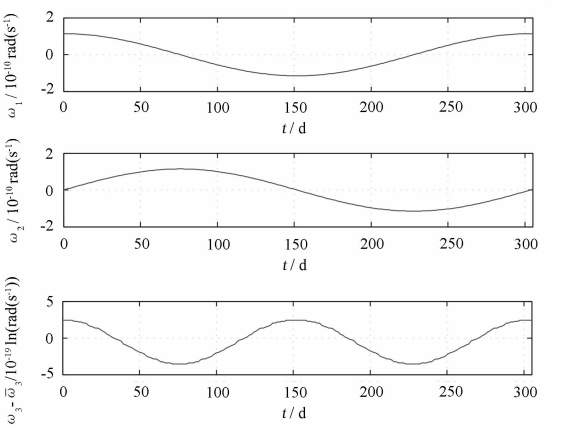


图 1　ω_i-t 曲线：角速度与时间的关系

Fig. 1　ω_i-t curves: the relation between the angular velocity components and time

表 1　3 个角速度分量信息（单位：rad/s）

Tab. 1　Information of three angular velocity components (unit: rad/s)

	ω_1	ω_2	ω_3
最大值	$1.144\ 579\ 343\ 902\ 996\times10^{-10}$	$1.148\ 412\ 048\ 908\ 373\times10^{-10}$	$7.292\ 115\ 000\ 000\ 060\times10^{-5}$
最小值	$-1.144\ 579\ 343\ 902\ 996\times10^{-10}$	$-1.148\ 412\ 048\ 908\ 373\times10^{-10}$	$7.292\ 115\ 000\ 000\ 000\times10^{-5}$
平均值	$1.132\ 967\ 280\ 689\ 162\times10^{-12}$	$1.785\ 767\ 039\ 139\ 498\times10^{-14}$	$7.292\ 115\ 000\ 000\ 035\times10^{-5}$

下面研究 Euler 角的数值解。由式（1）可以直接得到以下关系式

$$\begin{cases}\dot{\psi}=\dfrac{\omega_1\sin\phi+\omega_2\cos\phi}{\sin\theta}\\ \dot{\theta}=\omega_1\cos\phi-\omega_2\sin\phi\\ \dot{\phi}=\omega_3-\cot\theta(\omega_1\sin\phi+\omega_2\cos\phi)\end{cases}\tag{20}$$

在假定 $\sin\theta\neq0$ 的前提下，注意到 $\dot{\phi}\equiv\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t\approx\Delta\phi/\Delta t$ 等，微分方程式（20）可以直接采用差分法进行解算，即[10]

$$\begin{cases}\psi_{n+1}=\tau\dfrac{\omega_1^{(n)}\sin\phi_n+\omega_2^{(n)}\cos\phi_n}{\sin\theta_n}+\psi_n\\ \theta_{n+1}=\tau(\omega_1^{(n)}\cos\phi_n-\omega_2^{(n)}\sin\phi_n)+\theta_n\\ \phi_{n+1}=\tau[\omega_3^{(n)}-\cot\theta_n(\omega_1^{(n)}\sin\phi_n+\omega_2^{(n)}\cos\phi_n)]+\phi_n\end{cases}\tag{21}$$

其中，$\tau\equiv t_{n+1}-t_n$ 为时间间隔（例如，可取 $\tau=10$ 分钟），ψ_n、θ_n、ϕ_n 以及 $\omega_i^{(n)}$（$i=1,2,3$）均对应于时间 $t=t_n$。解算结果列于图 2 和表 2。结果表明，3 个 Euler 角速率也具有约 305.147 992 天的周期，且均在一半周期（152.573 996 天）内增大，在另一半周期内减小，但总角速率（约 $7.292\,115\times10^{-5}$ rad/s）保持不变。

需要指出的是，在假设 $A=B$ 的情况下，进动角 ϕ 的周期也约为 305.147 992 天，与本文给出的结果基本相同，这是因为当 $A=B$ 时，$m=\dfrac{\gamma C_{12}}{\alpha C_{23}}=0$，而在 3 个主惯性矩互不相等的情形（实际地球），$m=1.652\,725\,775\,452\,095\times10^{-14}$ 是非常小的量，因而求解椭圆积分（19）所得到的结果也非常接近。

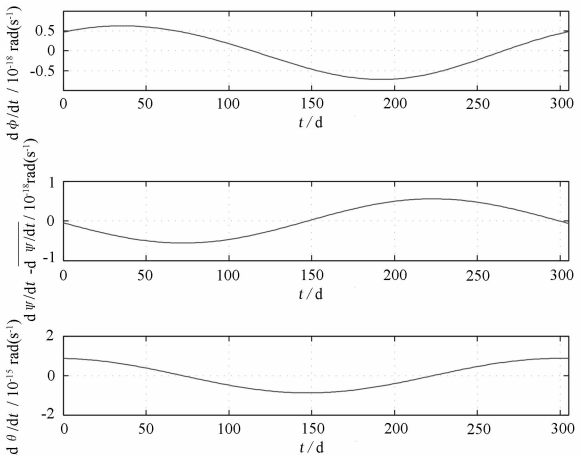


图 2 Euler 角随时间的变化曲线

Fig. 2 The curves of the variations of the Eulerian angles along with time

表 2 Euler 角的变化信息（单位：rad/s）

Tab. 2 Information of the variation of the Eulerian angles (unit: rad/s)

	$\dot{\phi}$	$\dot{\psi}$	$\dot{\theta}$
最大值	$6.294\,536\,031\,967\,882\times10^{-19}$	$7.292\,115\,052\,419\,944\times10^{-5}$	$1.146\,495\,696\,405\,685\times10^{-10}$
最小值	$-6.294\,536\,031\,967\,882\times10^{-19}$	$7.292\,115\,052\,419\,938\times10^{-5}$	$-1.146\,495\,696\,405\,685\times10^{-10}$
平均值	$-1.855\,655\,505\,327\,499\times10^{-22}$	$7.292\,115\,052\,419\,941\times10^{-5}$	$1.176\,572\,904\,729\,431\times10^{-18}$

为了考察 $\dot{\phi}$ 的精细变化，令

$$K=-\cot\theta(\omega_1\sin\phi+\omega_2\cos\phi)\tag{22}$$

利用数值计算，由图 3 和表 3 给出了 $\dot{\phi}$ 和 K 随时间变化的特征。

由图 3 和表 3 可以看出，$\dot{\phi}$ 与 K 的周期非常接近。由方程（22）和方程（20）之第 3 式知，$\dot{\phi}-K=\omega_3$，即 $\dot{\phi}$ 与 K 之差为 ω_3。根据图 1，ω_3 具有周期为 152.5 天的微小波动。这就意味着，$\dot{\phi}$ 具有由 K 控制的约 305.147 992 天的主周期（振幅约 2.0×10^{-5}），同时还叠加了周期为 152.5 天的微小波动，其振幅约为 2.5×10^{-19}。特别值得注意的是，对于三轴地球，在其旋转过程中不可避免地会出现章动效应，这也说明了三轴地球的运动与旋转对称椭球的运动有本质的区别（图 4 和表 4）。

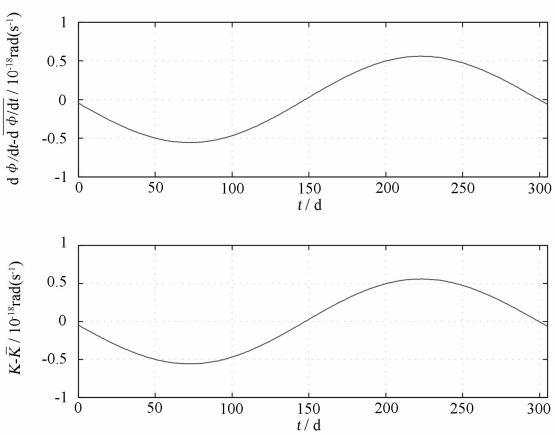


图 3 $\dot{\phi}$ 与 K 的比较

Fig. 3 The comparison between $\dot{\phi}$ and K

表 3　$\dot{\phi}$ 与 K 的比较（单位:rad/s）

Tab. 3　The comparison between $\dot{\phi}$ and K (unit: rad/s)

	$\dot{\phi}$	K
最大值	$6.294\,536\,031\,967\,882\times10^{-19}$	$7.292\,115\,052\,419\,944\times10^{-5}$
最小值	$-6.294\,536\,031\,967\,882\times10^{-19}$	$7.292\,115\,052\,419\,938\times10^{-5}$
平均值	$-1.855\,655\,505\,327\,499\times10^{-22}$	$7.292\,115\,052\,419\,941\times10^{-5}$

表 4　章动角 θ 的周期性变化(单位:rad)

Tab. 4　The periodic variation of the nutation angle θ(unit:rad)

	最大值	最小值	平均值
θ	$1.581\,171\,995\,542\,084\times10^{-6}$	$1.558\,052\,628\,886\,650\times10^{-6}$	$1.569\,747\,209\,970\,251\times10^{-6}$

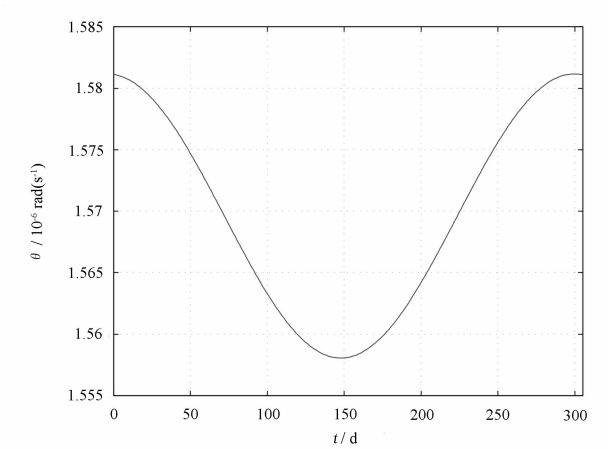


图 4　章动角 θ 的周期性变化

Fig. 4　The periodic variation of the nutation angle θ

概括起来，根据图 1 ~4 以及表 1 ~ 4，可得出以下结论：

1）3 个 Euler 角的变化率与 3 个角速度分量相近。自转角 ψ 描述了旋转速度在平均值附近作波浪式变化，表明日长有周期性起伏。章动角 θ 和进动角 ϕ 在以 0 为平均值的正负区间内波动，不过二者速度的绝对值并不接近：θ 角速度的变化率甚小，而 ϕ 角速度的变化率则在大约占地球旋转速度的 ±32.56% 左右变化。

2）从方程（10）~（12）可以看出，角速度的 3 个分量两两耦合构成两个椭圆函数和一个双曲函数，前者是两个稳定的单摆，表现为稳定的周期性进动；后者是一个不稳定的倒立单摆，有可能刻画出地极的长期西向漂移，并有可能与地磁极翻转[11,12]以及地球自转轴的倒转[13]发生关联。

4　结语

研究表明，在三轴刚性地球情形，可以得出如下一般性结论：1）地球自转角速度将呈现出周期约 152.5 天的周期性变化，致使约 24 小时的日长产生附加的周期性波动，时而加速，时而减速；2）除了周期为 305.147 992 天的自由 Euler 进动之外，地球还存在周期约 305.147 992 天的章动。

本文只研究了三轴刚性地球的旋转问题。实际上，真实地球的旋转运动非常复杂。首先，地球是弹滞体，再加上日月引潮力影响（地球由此而受到外力距作用），致使 305.147 992 天的 Euler 自由进动变为 430 天左右的 Chandler 晃动。其次，由于地球系统内物质的迁移（如大气、海水流动，大陆漂移，地幔对流，内核超速旋转等），导致地球主惯性矩 A、B、C 并非始终与 ox、oy、oz 诸轴重合。在此情形下，方程（4）和（5）并非严格成立，而是需要研究方程（2）的求解问题，这就需要知道二阶惯性矩 I^{ij}（共 6 个独立分量）。目前，由于对地球的物质密度分布的了解还不够精确，因此，就目前的状况来看，获得 I^{ij} 的最好办法是利用现有的重力场模型（如 EGM96）（因为 I^{ij} 与二阶球谐系数之间有密切关联[2,14]）。毫无疑问，如何客观地描述地球的旋转运动，需要较精确的地球模型（由此获得较精确的 I^{ij}）以及基于 Euler 动力学方程的精密的数值计算。

References

1　Groten E. Parameters of common relevance of astronomy, geodesy, and geodynamics[J]. J. Geod., 2000,74: 134 - 140.

2　Marchenko A N and Abrikosov O A. Evolution of the Earth's principal axes and moments of inertia: the canonical form of solution[J]. J. Geodesy, 2001, 74: 655 - 669.

3　申文斌,梁毅强. 内核对地球主转动惯量 A 与 B 的差异的贡献[J]. 大地测量与地球动力学, 2006, 26(2):39 ~ 42.

3　Shen Wenbin and Liang Yiqiang. Contribution of inner core to difference between earth's principle
（下转第 25 页）