

天文大气折射级数展开式的系数^{* 1}

张捍卫 雷伟伟 丁安民

(河南理工大学测绘与国土信息工程学院,焦作 454003)

摘 要 利用射线路径上两点之间大气参数满足的理论关系,给出了大气对天文大气折射的影响,不但考虑了干大气,而且考虑了水汽电子位移极化和偶极子转向极化对天文大气折射的贡献。该积分表达式不依赖于大气分布模型,适应不同方位的计算和高精度的需求。

关键词 天文大气折射;多元大气层;等温大气层;干大气;水汽

中图分类号:P427

文献标识码:A

COEFFICIENTS IN SERIES EXPANSION OF ASTRONOMICAL ATMOSPHERIC REFRACTION

Zhang Hanwei, Lei Weiwei and Ding Anmin

(School of Surveying & Land Information Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003)

Abstract Using the theoretical relationship satisfied by atmospheric parameters between two points in the ray path, the influence of the atmosphere layer to astronomical atmospheric refraction was obtained. It not only considered the contribution of electronic displacement polarization of the dry air to astronomical atmospheric refraction, but also considered contribution of electronic displacement polarization and dipole steering polarization of water vapor. The integral representation is given, it does not depend on atmospheric distribution models, and it could adapt the calculation of different directions and meet the demand for high-precision.

Key words: astronomical atmospheric refraction; polybasic atmospheric layer; isothermal atmospheric layer; dry air; water vapor

1 引言

本文是文献[1]工作的继续。文献[1]在文献[2, 3]的理论基础上,对天文大气折射的级数展开方法进行了重新研究。使得级数展开式的系数在理论上达到了亚毫角秒量级,并且可以展开到任意阶次项,把地面附近的位相折射指数作为未知数单独提出来,适应了光学观测技术在不同观测波长情况下的处理。本文的思想是把大气分为有限个薄层,

在射线路径上每个薄层的大气参数满足一定的理论关系。利用这一理论关系推求某个薄层对天文大气折射级数展开式中系数的贡献。如果有准确的大气高空探测资料,那么可利用本文公式来准确计算天文大气折射。本文工作对地球大气分布模型没有任何要求,只需使得光线传播路径上相邻两点的大气参数满足确定的关系即可。因此,本文工作不但改进了文献[2~7]的大气折射理论,而且适应了不同方位的需求。文献[2~7]的大气折射理论都是基

* 收稿日期:2012-03-01

基金项目:国家自然科学基金(41172199)

作者简介:张捍卫,男,1967年生,教授,博士,主要从事大地测量学的教学和科研工作。E-mail: zhanwei800@163.com

于球对称大气分布模型建立的,由于高空大气探测资料的缺乏,很少有学者研究适应于不同方位的大气折射理论。目前,只有文献[8,9]研究了三维大气折射理论,并考虑了测站地形和周围建筑物的影响。随着全球大气探测资料空间分辨率和准确性的提高,大气折射理论研究也应该适当改进。

文献[1]在亚毫角秒理论精度上,给出了一个包含水汽影响的,并且可展开到任意阶次的天文大气折射级数展开式,其系数 $E(k)$ 是数组 $A(J, L)$ 的线性函数,由于篇幅所限,文献[1]没有给出 $A(J, L)$ 的具体表述,本文将完成这一工作。

2 天文大气折射的级数展开式^[1]

天文大气折射的级数展开式是

$$\Delta z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k E(k) \tan^{2k+1} \bar{z}_0 \quad (1)$$

式中 \bar{z}_0 为视天顶距。 $E(k)$ 是四个数组的线性函数,即

$$E(k) = f(A(0, k), A(1, k), A(2, k), A(3, k)) \quad (2)$$

3 数组 $A(J, L)$ 的具体表述

如图1所示,电磁波沿射线路径 R_g 到达测站 A 点。在 A 点处,射线的切线方向与其地心向径的夹角为 \bar{z}_0 ;在射线路径上某一点处的位势地心距、大气热力学温度、干大气分压、水汽分压和大气折射指数分别用 z, T, p, e 和 n 表示;在 A_2, A_1 和 A 点处,对应的参数分别用其下标 2、1 和 0 表示。数组 $A(J, L)$ 是沿射线路径对 $(\xi_4)^J (\xi_2)^L$ 的积分。如果在射线

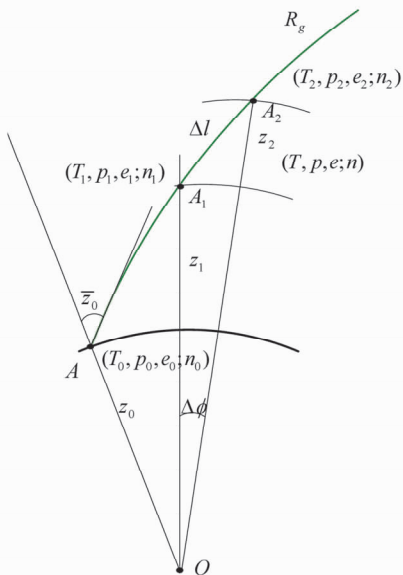


图1 光线传播路径示意图

Fig. 1 Schematic diagram of the light ray propagation

路径上大气可分成有限个薄层,每个薄层内部大气参数(气压和温度等)满足确定的理论关系,约定薄层顶部和底部的大气折射指数分别为 n_2 和 n_1 ,那么数组 $A(J, L)$ 可表示为

$$A(J, L) = \sum B(J, L)$$

其中

$$B(J, L) = \frac{1}{n_0} \int_{n_2}^{n_1} \left(\frac{n_0 - n}{n_0} \right)^J \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^L dn \quad (3)$$

是某个薄层的积分。

由于 $(n_0 - n) = (n_0 - 1) - (n - 1)$,那么 $B(J, L)$ 可写为

$$B(J, L) = \left(\frac{1}{n_0} \right)^{J+1} \sum_{j=0}^J \left\{ \frac{J!}{(J-j)! j!} \frac{(-1)^j (n_0 - 1)^{J-j}}{j!} C(j, L) \right\} \quad (4)$$

式中,数组 $C(J, L)$ 的定义是

$$C(J, L) = \int_{n_2}^{n_1} (n - 1)^J \left(\frac{z - z_0}{z_0} \right)^L dn \quad (5)$$

式中, $J \in N, L \in N, N$ 表示自然数集。由于

$$(z - z_0) = (z_1 - z_0) + (z - z_1)$$

那么式(5)可写为

$$C(J, L) = D(J, L) + \sum_{l=0}^{L-1} \frac{L!}{(L-l)! l!} \left(\frac{z_1 - z_0}{z_0} \right)^{L-l} D(J, l) \quad (6)$$

而数组 $D(J, L)$ 的定义是

$$D(J, L) = \int_{n_2}^{n_1} (n - 1)^J \left(\frac{z - z_1}{z_0} \right)^L dn \quad (7)$$

4 数组 $D(J, L)$ 的具体表述

一般情况下,大气折射指数的表达式是: $n - 1 = X + Y + Z$,那么

$$(n - 1)^J = \sum_{j=0}^J \frac{J!}{j! (J-j)!} X^{J-j} \sum_{l=0}^j \frac{j!}{l! (j-l)!} Y^{j-l} Z^l$$

这样可以把式(7)写为

$$D(J, L) = \sum_{j=0}^J \frac{J!}{j! (J-j)!} \sum_{l=0}^j \frac{j!}{l! (j-l)!} S(J-j, j-L, l; L) \quad (8)$$

式中,数组 $S(I, J, K; L)$ 的表达式是

$$S(I, J, K; L) = S_1(I, J, K; L) + S_2(I, J, K; L) + S_3(I, J, K; L) \quad (9)$$

式中等号右端各项分别是

$$S_1(I, J, K; L) = \int_{n_2}^{n_1} X^I Y^J Z^K \left(\frac{z - z_1}{z_0} \right)^L dX \quad (10)$$

$$S_2(I, J, K; L) = \int_{n_2}^{n_1} X^I Y^J Z^K \left(\frac{z - z_1}{z_0} \right)^L dY \quad (11)$$

$$S_3(I, J, K; L) = \int_{n_2}^{n_1} X^I Y^J Z^K \left(\frac{z - z_1}{z_0} \right)^L dZ \quad (12)$$

式中, $I \in N, J \in N, K \in N, L \in N$ 。

5 多元大气层中数组 $S(I, J, K; L)$ 的表述

如果在 A_1 和 A_2 点之间的大气属于多元大气, 则大气参数满足^[10]:

$$T(z) = T_1 + \beta(z - z_1), p = p_1 (T/T_1)^{-\frac{g_0}{R\beta}},$$

$$e = e_1 (T/T_1)^{-\frac{g_0 \varepsilon}{R\beta}} \quad (13)$$

式中 β 为常数, $R = 287.072 \text{ J K}^{-1} \text{ kg}^{-1}$ 是干大气比气体常数, g_0 是测站重力值, $\varepsilon \approx 0.622$ 是水汽与干大气的摩尔质量之比。

大气折射指数 $(n-1)$ 可表述为^[11,12]:

$$n-1 = \frac{k_1 p}{T} + \frac{k_2 e}{T} + \frac{k_3 e}{T^2} \quad (14)$$

式中 k_1, k_2 和 k_3 对特定波长是常数。因此, 把式(13)代入式(14), 有

$$n-1 = \frac{k_1 p_1}{T_1} \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\xi_1} + \frac{k_2 e_1}{T_1} \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\xi_2} + \frac{k_3 e_1}{(T_1)^2} \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\xi_3} \quad (15)$$

其中

$$\xi_1 = -\frac{g_0}{R\beta} - 1, \xi_2 = -\frac{\varepsilon g_0}{R\beta} - 1, \xi_3 = -\frac{\varepsilon g_0}{R\beta} - 2$$

如果以 X, Y 和 Z 分别表示式(15)式等号右端的各项, 显然

$$X_1 = \frac{k_1 p_1}{T_1}, Y_1 = \frac{k_2 e_1}{T_1}, Z_1 = \frac{k_3 e_1}{(T_1)^2}, X_2 = \frac{k_1 p_2}{T_1},$$

$$Y_2 = \frac{k_2 e_2}{T_1}, Z_2 = \frac{k_3 e_2}{(T_1)^2}$$

就分别表示在多元层的底部和顶部处, 由于干大气和水汽的电子位移极化, 以及水汽的偶极子转向极化对大气折射指数的贡献。

利用式(15)可把式(10)~(12)表示为:

$$S_1(I, J, K; L) = - \frac{\sum_{l=0}^{L-1} \frac{(-1)^l L!}{(L-l)!} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_0} \right)^{L-l} \left(\frac{T_2}{z_0 \beta} \right)^l}{\prod_{j=0}^l [j + ((I+1)\xi_1 + J\xi_2 + K\xi_3)]} + (-1)^L L!$$

$$\frac{(X_2)^{I+1} (Y_2)^J (Z_2)^K \xi_1}{\prod_{j=0}^l [j + ((I+1)\xi_1 + J\xi_2 + K\xi_3)]} + (-1)^L L!$$

$$\frac{(X_1)^{I+1} (Y_1)^J (Z_1)^K \xi_1 \left(\frac{T_1}{z_0 \beta} \right)^L - (X_2)^{I+1} (Y_2)^J (Z_2)^K \xi_1 \left(\frac{T_2}{z_0 \beta} \right)^L}{\prod_{j=0}^l [j + ((I+1)\xi_1 + J\xi_2 + K\xi_3)]} \quad (16)$$

$$S_2(I, J, K; L) = - \frac{\sum_{l=0}^{L-1} \frac{(-1)^l L!}{(L-l)!} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_0} \right)^{L-l} \left(\frac{T_2}{z_0 \beta} \right)^l}{\prod_{j=0}^l [j + (I\xi_1 + (J+1)\xi_2 + K\xi_3)]} +$$

$$\frac{(X_2)^I (Y_2)^{J+1} (Z_2)^K \xi_2}{\prod_{j=0}^l [j + (I\xi_1 + (J+1)\xi_2 + K\xi_3)]} +$$

$$(-1)^L L!$$

$$\frac{(X_1)^I (Y_1)^{J+1} (Z_1)^K \xi_2 \left(\frac{T_1}{z_0 \beta} \right)^L - (X_2)^I (Y_2)^{J+1} (Z_2)^K \xi_2 \left(\frac{T_2}{z_0 \beta} \right)^L}{\prod_{j=0}^l [j + (I\xi_1 + (J+1)\xi_2 + K\xi_3)]} \quad (17)$$

$$S_3(I, J, K; L) = - \frac{\sum_{l=0}^{L-1} \frac{(-1)^l L!}{(L-l)!} \left(\frac{z_2 - z_1}{z_0} \right)^{L-l} \left(\frac{T_2}{z_0 \beta} \right)^l}{\prod_{j=0}^l [j + (I\xi_1 + J\xi_2 + (K+1)\xi_3)]} + (-1)^L L!$$

$$\frac{(X_2)^I (Y_2)^J (Z_2)^{K+1} \xi_3}{\prod_{j=0}^l [j + (I\xi_1 + J\xi_2 + (K+1)\xi_3)]} + (-1)^L L!$$

$$\frac{(X_1)^I (Y_1)^J (Z_1)^{K+1} \xi_3 \left(\frac{T_1}{z_0 \beta} \right)^L - (X_2)^I (Y_2)^J (Z_2)^{K+1} \xi_3 \left(\frac{T_2}{z_0 \beta} \right)^L}{\prod_{j=0}^l [j + (I\xi_1 + J\xi_2 + (K+1)\xi_3)]} \quad (18)$$

式中 Π 表示连乘号。

6 等温大气层中数组 $S(I, J, K; L)$ 的表述

如果在 A_1 和 A_2 点之间的大气属于等温大气层, 则大气参数满足^[10]:

$$T \equiv T_1, p(z) = p_1 \exp[\tau(z - z_1)],$$

$$e(z) = e_1 \exp[\eta(z - z_1)] \quad (19)$$

式中, $\tau = -g_0/RT_1$, $\eta = -g_0\varepsilon/RT$ 。把式(19)代入(14), 有

$$n-1 = \frac{k_1 p_1 \exp[\tau(z - z_1)]}{T_1} +$$

$$\frac{k_2 e_1 \exp[\eta(z - z_1)]}{T_1} + \frac{k_3 e_1 \exp[\eta(z - z_1)]}{(T_1)^2} \quad (20)$$

如果以 X, Y 和 Z 分别表示上式等号右端的各项, 显然

$$X_1 = \frac{k_1 p_1}{T_1}, Y_1 = \frac{k_2 e_1}{T_1}, Z_1 = \frac{k_3 e_1}{(T_1)^2}, X_2 = \frac{k_1 p_2}{T_1},$$

$$Y_2 = \frac{k_2 e_2}{T_1}, Z_2 = \frac{k_3 e_2}{T_1^2}$$

就分别表示在等温层的底部和顶部处, 由于干大气和水汽的电子位移极化, 以及水汽的偶极子转向极化对大气折射指数的贡献。

利用式(20), 可把式(10)~(12)表示成

$$S_1(I, J, K; L) = - \frac{(X_2)^{I+1} (Y_2)^J (Z_2)^K}{(I+1) + (J+K)\varepsilon}$$

$$\sum_{l=0}^{L-1} \frac{L!}{(L-l)!} \left(\frac{RT_1}{z_0 g_0 [(I+1) + (J+K)\varepsilon]} \right)^l$$

$$\left(\frac{z_2 - z_1}{z_0} \right)^{L-l} +$$

$$L! \frac{(X_1)^{I+1} (Y_1)^J (Z_1)^K - (X_2)^{I+1} (Y_2)^J (Z_2)^K}{(I+1) + (J+K)\varepsilon}$$

$$\left(\frac{RT_1}{z_0 g_0 [(I+1) + (J+K)\varepsilon]} \right)^L \quad (21)$$

$$S_2(I, J, K; L) = - \frac{(X_2)^I (Y_2)^{J+1} (Z_2)^K \varepsilon}{I + (J + 1 + K) \varepsilon} \\ \sum_{l=0}^{L-1} \frac{L!}{(L-l)!} \left(\frac{RT_1}{z_0 g_0 [I + (J + 1 + K) \varepsilon]} \right)^l \left(\frac{z_2 - z_1}{z_0} \right)^{L-l} + \\ L! \frac{(X_1)^I (Y_1)^{J+1} (Z_1)^K \varepsilon - (X_2)^I (Y_2)^{J+1} (Z_2)^K \varepsilon}{I + (J + 1 + K) \varepsilon} \\ \left(\frac{RT_1}{z_0 g_0 (I + (J + 1 + K) \varepsilon)} \right)^L \quad (22)$$

$$S_3(I, J, K; L) = - \frac{(X_2)^I (Y_2)^J (Z_2)^{K+1} \varepsilon}{I + (J + 1 + K) \varepsilon} \\ \sum_{l=0}^{L-1} \frac{L!}{(L-l)!} \left(\frac{RT_1}{z_0 g_0 [I + (J + K + 1) \varepsilon]} \right)^l \left(\frac{z_2 - z_1}{z_0} \right)^{L-l} + \\ L! \frac{(X_1)^I (Y_1)^J (Z_1)^{K+1} \varepsilon - (X_2)^I (Y_2)^J (Z_2)^{K+1} \varepsilon}{I + (J + K + 1) \varepsilon} \\ \left(\frac{RT_1}{z_0 g_0 (I + (J + K + 1) \varepsilon)} \right)^L \quad (23)$$

7 计算过程阐述

计算过程中,需要已知测站的位势地心距 z_0 和重力值 g_0 ,某个大气薄层底部和顶部的位势地心距 z_1 和 z_2 ,以及该薄层底部的大气参数 (T_1, p_1, e_1) 和顶部的大气参数 (T_2, p_2, e_2) 。

对于多元大气薄层,大气参数必须满足式(13)。首先利用式(15)计算底部和顶部处的大气折射指数 (X_1, Y_1, Z_1) 和 (X_2, Y_2, Z_2) ;其次利用式(16)~(18)计算数组 S_1, S_2 和 S_3 ,并利用式(9)计算数组 S ;最后,利用式(8)计算数组 D ,利用式(6)计算数组 C ,利用式(4)计算数组 B 。

对于等温大气薄层,大气参数必须满足式(19)。首先利用式(20)计算底部和顶部处的大气折射指数 (X_1, Y_2, Z_1) 和 (X_2, Y_2, Z_2) ;其次利用式(21)~(23)计算数组 S_1, S_2 和 S_3 ,并利用式(9)计算数组 S ;最后,利用式(8)计算数组 D ,利用式(6)计算数组 C ,利用式(4)计算数组 B 。

不同薄层 $B(J, L)$ 数组的相加,就得到整个大气层的积分数组 $A(J, L)$ 。

8 结论与讨论

本文结论是建立在式(13)和(19)基础上。如果大气层很薄,建立满足上述函数关系的大气薄层是可以办得到的。因此,利用本文给出的公式计算天文大气折射是完全可行的。

如果在光学波段上观测,则式(14)等号右端没有第三项。此时,就不存在 S_3 数组。对于数组 S_1 和 S_2 ,其形式就是在令 $K=0$ 下的表达式。

如果不考虑水汽对天文大气折射的影响,则式(14)只存在等号右端的第一项。此时,就不存在 S_2 和 S_3 数组。对于数组 S_1 ,其形式就是在令 $J=K=0$ 下的表达式。

参 考 文 献

- 1 张捍卫,丁安民,雷伟伟. 天文大气折射的级数展开式[J]. 大地测量与地球动力学,2011,(4):60-62,79. (Zhang Hanwei, Ding Anmin and Lei Weiwei. The series expansion of astronomical atmospheric refraction[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2011,(4):60-62,79)
- 2 Saastamoinen J. Contributions to the theory of atmospheric refraction, part I, astronomical refraction [J]. Bulletin Géodésique, 1972a, 105: 279-299.
- 3 Saastamoinen J. Introduction to practical computation of astronomical refraction[J]. Bulletin Géodésique, 1972b, 106: 383-397.
- 4 Willis J E. A determination of astronomical refraction from physical data[J]. Transactions of the American Geophysical Union, 1941,22(Part II):324-336.
- 5 Garfinkel B. An investigation in the theory of astronomical refraction[J]. Astronomical Journal, 1944, 50(8):169-179.
- 6 Garfinkel B. Astronomical refraction in a polytropic atmosphere[J]. Astronomical Journal, 1967, 72(2):235-254.
- 7 冒蔚,铁琼仙,杨磊. 天文大气折射[M]. 昆明:云南科技出版社,2004. (Man Wei,Tie Qiongxi and Yang Lei. Astronomical atmospheric refraction[M]. Kunming: Yunnan Science and Technology Press,2004)
- 8 Berton R P H. Variational calculation of three-dimensional atmospheric refraction: part I. Description and validation of the method[J]. Journal of Optics A: Pure and Applied Optics, 2006,8(A10): 817-830.
- 9 Berton R P H. Variational calculation of three-dimensional atmospheric refraction: part II. Application to assessment of positioning accuracy[J]. Journal of Optics A:Pure and Applied Optics, 2007, 9(A7): 603-620.
- 10 盛裴轩,等. 大气物理学[M]. 北京:北京大学出版社,2003. (Sheng Peixuan, et al. Atmospheric physics[M]. Beijing: Beijing University Press,2003)
- 11 Ciddor P E. Refractive index of air: New equations for the visible and near infrared[J]. Applied Optics(Lasers, Photonics and Environmental Optics), 1996, 35(9): 1 566-1 573.
- 12 Ciddor P E and Hill R J. Refractive index of air: Group index[J]. Applied Optics(Lasers, Photonics and Environmental Optics), 1999, 38(9):1 663-1 667.