

# 同时利用 $x^{(1)}(1)$ 和 $x^{(1)}(n)$ 为 GM(1,1) 建模初始条件的预测方法研究<sup>\*1</sup>

袁德宝 崔希民 高 宁

(中国矿业大学(北京)地球科学与测绘工程学院,北京 100083)

**摘 要** 以灰色 GM(1,1)模型初始条件的优化为主要研究目的,分别讨论了以  $x^{(1)}(1)$ 、 $x^{(1)}(n)$  为初始条件的 GM(1,1)建模机理;提出了同时利用  $x^{(1)}(1)$  和  $x^{(1)}(n)$  为 GM(1,1)模型初始条件的新方法,以  $x^{(1)}(t)$  的模拟值与原始数据的 1-AGO 序列的误差平方和最小为约束条件,推导了初始条件优化后的预测模型公式;对模型预测精度起决定性作用的参数进行分析,给出了初始条件优化后模型的适用范围。经大量的数据模拟和预测,发现初始条件优化后的 GM(1,1)模型各项精度指标均优于传统的 GM(1,1)模型。

**关键词** GM(1,1)模型;初始条件;参数;适用范围;预测

**中图分类号**:P207

**文献标识码**:A

## A FORECAST METHOD COMBINING $x^{(1)}(1)$ WITH $x^{(1)}(n)$ AS INITIAL VALUE OF GM(1,1) MODEL

Yuan Debao, Cui Ximin and Gao Ning

(College of Geoscience and Surveying Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083)

**Abstract** In order to reestablish the initial value for GM (1,1) model, we proposed a new approach to improve prediction accuracy of GM(1,1) model through optimization of the initial value, which is comprised of the first and the  $n$ -th vector as the initialization, and derived from a method of least error summation of square. Then we discussed the parameter which affects the fitting results. By contrasting the improved one to the GM(1,1) about the simulation and prediction, we can conclude that the improved one is superior in prediction and simulation, and it is proved that the optimum one widen its suitable range.

**Key words**: GM(1,1) model; initial value; parameter; suitable range; forecast

## 1 引言

GM(1,1)模型由于其建模过程所需样本数量较少、模型表达式简洁,便于求解,能较好地对系统行为特征值的发展过程进行预测。GM(1,1)模型在应用过程中也存在预测精度不高的情况,因此,不

少研究人员提出了对 GM(1,1)模型的改进与适用范围的研究。文献[1]指出利用  $x^{(1)}(1)$  做为白化微分方程响应式初始条件是不合理的,提出了  $x^{(1)}(m)$  作为初始条件的预测公式(其中  $m$  值应根据建模的实际情况来选取);文献[2]利用  $x^{(1)}(k)$  的模拟值与原始数据的 1-AGO 序列的差值平方和最小,

\* 收稿日期:2012-12-07

**基金项目**:国家自然科学基金(41071328);国家重点基础研究发展规划(973)项目(2007CB209400);教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NECT-07-07098);矿山空间信息技术国家测绘局重点实验室开放基金(KLM200816)

**作者简介**:袁德宝,男,1976年生,博士研究生,主要从事GPS定位与导航的研究。E-mail:debaoyuan@qq.com

确定时间响应函数中的初始条件,从而构建了优化的 GM(1,1)模型;文献[3-5]均认为以  $x^{(1)}(1)$  为初始条件进行建模没有充分利用最新信息,根据新信息对认知的作用大于历史信息的原理,提出了以新信息  $x^{(1)}(n)$  为初始条件的 GM 模型。而作者认为在 GM 建模过程中,研究的系统对象是不断发展变化的,虽然与预测时间更接近的新信息对未来预测有特殊的地位,但历史信息对研究系统的发展过程也具有一定作用,建模时也不能完全抛弃。所以,针对上述问题,本文提出了利用  $x^{(1)}(1)$  和  $x^{(1)}(n)$  同时建模,并在  $x^{(1)}(k)$  的模拟值与原始数据的 1-AGO 序列的差值平方和最小的约束条件下,对 GM(1,1)模型的初始条件进行重构,经大量的数据模拟和比较发现,新初始条件的 GM(1,1)模型在发展系数的系列变化中,比 GM(1,1)的模拟精度和预测精度更高。

## 2 $x^{(1)}(1)$ 为初始条件的 GM(1,1)模型

设序列  $x^{(0)} = \{x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)\}$ , 对  $x^{(0)}$  作一次累加得到生成序列  $x^{(1)} = \{x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)\}$ , 其中  $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x^{(0)}(i)$ , ( $k=1, 2, \dots, n$ )。假定  $x^{(1)}(k)$  具有近似指数变化规律,则 GM(1,1)模型的白化微分方程为<sup>[1,6,7]</sup>:

$$dx^{(1)}(k)/dt + ax^{(1)}(k) = u \quad (1)$$

将式(1)离散化,微分变差分,得到 GM(1,1)灰微分方程为:

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = u, k=2, 3, \dots, n \quad (2)$$

将式(2)展开,得:

$$\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

令  $y = [x^{(0)}(2) x^{(0)}(3) \dots x^{(0)}(n)]^T$ ,  $\hat{a} = [a, u]^T$ ,  $\hat{a}$  称为待辨参数向量,  $a$  和  $u$  为待辨参数,  $B =$

$$\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \text{其中,背景值 } z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), \text{则 } y = B\hat{a}, \text{由最小二乘法,待辨参数向量 } \hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T y. \text{则 } x^{(1)}(k) \text{ 的预测公式为:}$$

$$\hat{x}^{(1)}(k) = (x^{(0)}(1) - u/a)e^{-a(k-1)} + u/a \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

$x^{(0)}(k)$  的预测公式为:

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1) =$$

$$(1 - e^a)[x^{(0)}(1) - u/a]e^{-ak} \quad (k=2, \dots, n) \quad (5)$$

式(4)称为以  $x^{(1)}(1)$  为初始条件的 GM(1,1)模型,经分析发现,这是由于求解微分方程式(1)时,将  $\hat{x}^{(1)}(k) = x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$  作为已知条件造成的,式(1)的通解为:

$$\hat{x}^{(1)}(t) = ce^{-at} + u/a \quad (c \text{ 为任意常数}) \quad (6)$$

由于  $\hat{x}^{(1)}(t)|_{t=1} = x^{(1)}(1)$ ,代入式(6),则  $x^{(1)}(1) = ce^{-a} + u/a$ ;  $c = (x^{(1)}(1) - u/a)e^a$ ,并且规定  $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$ ,即可得到式(4)。

## 3 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM(1,1)模型

文献[3-5]认为 GM(1,1)是利用最小二乘法得到的拟合曲线,所以拟合曲线并不一定通过第一个数据点,以  $x^{(1)}(1) = x^{(0)}(1)$  作为初始条件有一定的主观臆断性,并且  $x^{(1)}(1)$  是一个旧数据,与未来预测关系不密切,所以选取与未来预测时间相邻最近的  $x^{(1)}(n)$  为初始条件,即:

$$\hat{x}^{(1)}(t)|_{t=n} = x^{(1)}(n) \quad (7)$$

将式(7)代入式(6),则

$$c = (x^{(1)}(n) - u/a)e^{an} \quad (8)$$

得到以  $x^{(1)}(n)$  为初始条件的 GM(1,1)时间相应函数为:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = (x^{(0)}(n) - u/a)e^{-a(k-n)} + u/a \quad (9)$$

## 4 同时利用 $x^{(1)}$ 和 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM(1,1)模型

灰色微分方程的通解如式(6)所示,分别以时刻  $t=1, t=n$  代入式(6),得:

$$\hat{x}^{(1)}(1) = ce^{-a} + u/a, \hat{x}^{(1)}(n) = ce^{-an} + u/a \quad (10)$$

假设存在参数  $\rho$ ,且  $\rho \in (0, 1)$ ,在式(10)两端分别乘以  $\rho$  和  $1 - \rho$ ,则:

$$\rho\hat{x}^{(1)}(1) = \rho ce^{-a} + \rho u/a, (1 - \rho)\hat{x}^{(1)}(n) = (1 - \rho)ce^{-an} + (1 - \rho)u/a \quad (11)$$

式(10)、(11)相加得:

$$\rho\hat{x}^{(1)}(1) + (1 - \rho)\hat{x}^{(1)}(n) = \rho ce^{-a} + (1 - \rho)ce^{-an} + u/a \quad (12)$$

$$c = \frac{\rho\hat{x}^{(1)}(1) + (1 - \rho)\hat{x}^{(1)}(n) - u/a}{\rho e^{-a} + (1 - \rho)e^{-an}} \quad (13)$$

以参数  $c$  代入式(6),从而得到同时以  $x^{(1)}(1)$  和  $x^{(1)}(n)$  为初始条件的 GM(1,1)模型预测模型为:

$$\hat{x}^{(1)}(k) = \frac{\rho\hat{x}^{(1)}(1) + (1 - \rho)\hat{x}^{(1)}(n) - u/a}{\rho e^{-a} + (1 - \rho)e^{-an}} e^{-ak} + u/a \quad (14)$$

对 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 累减还原,即可以得到 $\hat{x}^{(0)}(k)$ 。从式(14)中发现,新的初始条件中,包括与未来预测时刻相邻最近的数据 $x^{(1)}(n)$ 和历史数据 $x^{(1)}(1)$ ,从而,使建模过程中充分包含了最新信息和历史数据,使初始条件的选取方面得到优化。

参数 $\rho$ 的求解,根据文献[7]提出的 $x^{(1)}(t)$ 的模拟值与原始数据的1-AGO序列的差值平方和最小条件下,附加如下约束条件:

$$f(c,\rho) = \sum_{i=1}^n (\hat{x}^{(1)}(t) - x^{(1)}(t))^2 = \min \quad (15)$$

令 $f'(c)=0$ ,可得 $c = \frac{\sum_{i=1}^n (x^{(1)}(i) - u/a)e^{-ai}}{\sum_{i=1}^n e^{-2ai}} \quad (16)$

由式(13)和(16)求得

$$\rho = \frac{(x^{(1)}(n) - u/a) \sum_{i=1}^n e^{-2ai} - e^{-an} \sum_{i=1}^n [(x^{(1)}(k) - u/a)e^{-ai}]}{(e^{-a} - e^{-an}) \sum_{i=1}^n [(x^{(1)}(k) - u/a)e^{-ai} + (x^{(1)}(n) - x^{(1)}(1)) \sum_{i=1}^n e^{-2ai}]}$$

5 数据模拟与精度比较

文献[6-8]指出,对于GM(1,1)模型,当发展系数 $-a \leq 1$ 时,才可以应用GM(1,1)进行预测,但是对于发展系数的 $-a$ 的取值不同,预测效果也不同;在建模数据选取方面,为了满足GM(1,1)模型对建模样本要求近似指数变化规律的特点,所以本文的建模数据采用如下形式:在 $-a \leq 1$ 范围内,分别取 $-a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8, 1.0$ ,由 $x^{(0)}(i) = e^{-a(i-1)}$ 产生( $i = 1, 2, \dots, 6$ )。

5.1 预测结果比较

以 $x^{(0)}(i)$ 为原始数据序列分别建立原始GM(1,1)模型(模型1)和新初始条件的GM(1,1)模型(模型2),比较其模拟和预测结果(图1)。

由计算结果可以看出:随着发展系数 $-a$ 的增加,两种模型的拟合和预测误差逐渐增大,但模型(1)误差的增加速度要明显快于模型(2)。

在发展系数较小,即 $-a \leq 0.3$ 时,两种模型的模拟和预测结果精度相当(图1、2);当发展系数 $-a \geq 0.4$ 时,两种模型的模拟和预测结果有显著差别(图2); $-a = 0.5$ 时,两种模型的预测结果与原始数据序列相比,开始出现较大的差别;当 $0.5 < -a \leq 1.0$ ,从第三步预测开始出现较大误差(图3、4)。

5.2 模型适用范围讨论

为了近一步考查新模型(2)的适用性,统计取不同发展系数 $-a$ 时(参数 $\rho$ 的取值情况见表1),两种模型的预测误差结果见表2。

由表1可以看出,随着发展系数 $-a$ 的增加,参数 $\rho$ 也逐渐增大;结合表1考虑式(13)、(14),当 $\rho$

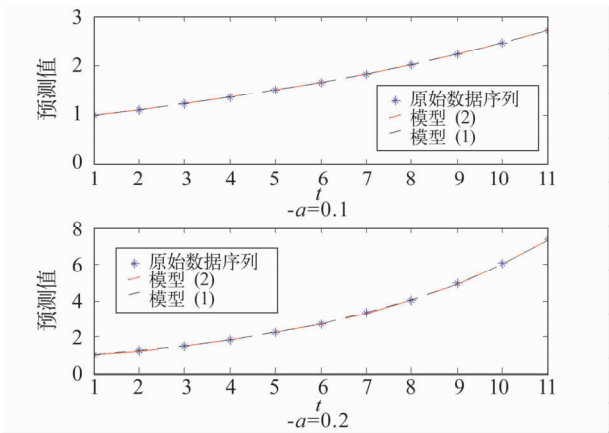


图1 发展系数为0.1和0.2时的预测结果  
Fig.1 Prediction results of developing coefficient 0.1 and 0.2

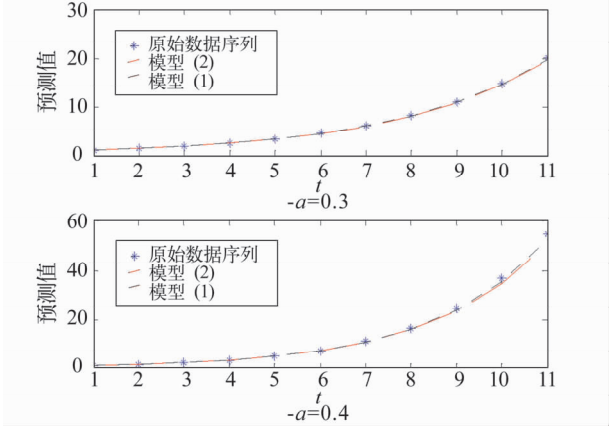


图2 发展系数为0.3和0.4时的预测结果  
Fig.2 Prediction results of developing coefficient 0.3 and 0.4

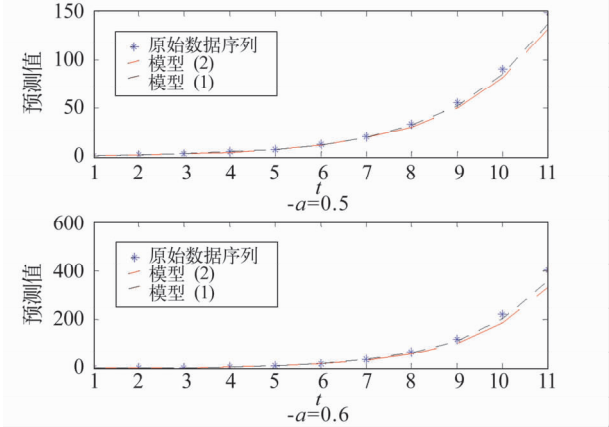


图3 发展系数为0.5和0.6时的预测结果  
Fig.3 Prediction results of developing coefficient 0.5 and 0.6

趋近于1时,即为 $x^{(1)}(1)$ 为初始条件的GM(1,1)模型;当 $\rho$ 趋近于零时,即为 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的GM(1,1)模型。所以本实验结果也间接证明了在GM(1,1)建模中,取 $x^{(1)}(1)$ 或 $x^{(1)}(n)$ 作为模型的初始条件均是有理论依据的,关键是要根据发展系数的变化,合理的选取建模的初始条件。

由表2可以看出,随着发展系数 $-a$ 的增加,两种模型的预测误差均逐渐增大,发展系数 $-a \leq 0.3$

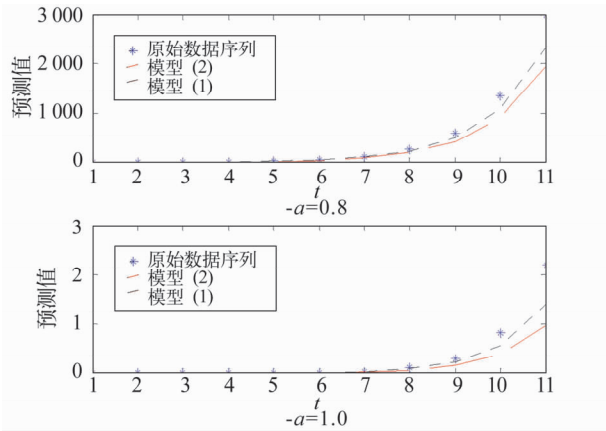


图4 发展系数为0.8和1.0时的预测结果

Fig.4 Prediction results of developing coefficient 0.8 and 1.0

时,1步预测和5步预测精度均可达到97%,此时我们可以考虑使用原始GM模型进行预测,而不必考虑对模型进行改进; $0.4 \leq -a \leq 0.5$ 时,利用新初始条件的GM模型,1步预测可达到97%左右,5步预测精度可达到93%以上; $0.6 \leq -a \leq 1.0$ 时,原始GM模型预测精度逐渐由90%降低至60%,而新初始条件的GM模型预测精度在1步预测和5步预测时,预测精度最高达到95%,最低为65%。所以,作者认为在发展系数为 $0.3 \leq -a \leq 0.4$ 时,是使用新初始条件GM模型作预测的最好区间,并且可以作中长期预测。

表1 参数  $\rho$  的取值

Tab.1 Results of parameter  $\rho$  with different developing coefficient

-a	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
$\rho$	0.5548	0.6335	0.7322	0.8272	0.8994	0.9454	0.9855	0.9963

表2 两种模型的预测误差比较(单位:%)

Tab.2 Comparison between prediction errors from the original GM(1,1) model and the modified one (unit: %)

发展系数 -a	模型(1)		GM 模型(2)	
	1步误差	5步误差	1步误差	5步误差
0.1	0.131 7	0.169 2	0.104 3	0.143 5
0.2	0.885 5	0.958 1	0.460 8	0.724 0
0.3	1.958 8	2.829 9	1.090 9	1.970 6
0.4	4.136 7	6.126 2	1.986 7	4.021 0
0.5	7.394 0	11.085 5	3.140 2	7.000 8
0.6	11.820 2	17.740 4	4.553 8	10.961 7
0.8	24.009 3	35.271 1	7.768 9	21.759 5
1.0	39.437 2	55.270 9	12.732 7	35.548 2

6 结论

GM(1,1)模型的预测结果与精度受建模初始条件的选取影响较大,此外,利用GM(1,1)模型进行预测时,应考虑原始数据序列的波动特性,同时考虑发展系数的变化给预测带来的影响。当发展系数较小时,按传统的方法选取建模初始条件即可,而无需进行优化;随着发展系数的不断增加,应根据数据变化的速率,重新选取建模的初始条件。本文提出的同时顾及新信息、历史信息为建模初始条件的方法,更适合于预测。

参 考 文 献

1 张大海,江世芳,史开泉. 灰色预测公式的理论缺陷及改进[J]. 系统工程理论与实践,2002,22(8):140-142. (Zhang Dahai, Jiang Shifang and Shi Kaiquan. Theoretical defect of grey prediction formula and its improvement[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2002, 22(8): 121-125)

2 刘斌,等. GM(1,1)模型时间响应函数的最优化[J]. 中国工程科学,2003,(4):54-56. (Liu Bin, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1) [J]. Chinese Journal of Management Science, 2003, (4): 54-56)

3 党耀国,刘思峰,刘斌. 以为初始条件的GM模型[J]. 中国工程科学,2005,(1):132-134. (Dang Yaoguo, Liu Sifeng and Liu Bin. The GM models that be taken as initial value[J]. Chinese Journal of Management Science, 2005, (1): 132-134)

4 刘思峰,等. 灰色系统理论及其应用(第五版)[M]. 北京:科学出版社,2010. (Liu Sifeng, et al. Grey system theory and its application [M]. Beijing: Science Press, 2010)

5 党耀国,等. 灰色预测与决策模型研究.[M]. 北京:科学出版社,2009. (Dang Yaoguo, et al. Grey prediction and decision[M]. Beijing:Science Press, 2009)

6 董奋义,田军. 背景值和初始条件同时优化的GM(1,1)模型[J]. 系统工程与电子技术,2007,(3):464-466. (Dong Fenyi and Tian Jun. Optimization integrated background value with original condition for GM(1,1) [J]. Systems Engineering and Electronics,2007, (3):464-466)

7 张怡,魏勇,熊常伟. 灰色模型GM(1,1)的一种新优化方法[J]. 系统工程理论与实践,2007,(4):141-146. (Zhang Yi, Wei Yong and Xiong Changwei. One new optimized method of GM(1,1) model[J]. Systems Engineering-Theory&Practice, 2007(4):141-146)

8 Liu S F and Deng J L. The range suitable for GM(1,1)[J]. The Journal of Grey System(UK),1999,11(1):131-138.