

混合结构总体最小二乘参数估计^{* 1}

胡 川¹⁾ 陈 义^{1,2)} 彭 友³⁾

(1)同济大学测绘与地理信息学院,上海 200092
(2)现代工程测量国家测绘局重点实验室,上海 200092
(3)四川建筑职业技术学院工程管理部,德阳 618000

摘 要 为解决当系数矩阵由常数列和非常数列组成,非常数列含有重复元素时传统混合总体最小二乘估计理论不够严密的问题,提出混合结构总体最小二乘参数平差模型,根据非线性最小二乘平差理论推导了混合结构总体最小二乘参数平差的迭代计算公式,并分别模拟计算了观测向量元素所受误差干扰量等于、大于和小于非常数列中非重复元素误差干扰量三种情况。实验结果表明:混合结构总最小二乘法不仅能够同时估计出系数矩阵常数列和非常数列所对应的参数值,而且能够对常数元素赋予零改正值,不同位置的同一元素赋予相同的改正值,单位权中误差估计值更接近模拟值;在系数矩阵非常数列中非重复元素所受误差干扰量大于观测矢量所受误差干扰量时,混合结构总体最小二乘参数平差法的参数和单位权中误差估计结果明显更接近于真实值。

关键词 总体最小二乘法;混合最小二乘;总体最小二乘法;混合结构总体最小二乘法;参数估计
中图分类号:P207 **文献标识码**:A

ON MIXED STRUCTURED TOTAL LEAST SQUARES FOR PARAMETERS ESTIMATION

Hu Chuan¹⁾, Chen Yi^{1,2)} and Peng You³⁾

(1)College of Surveying and Geo-informatics, Tongji University, Shanghai 200092
(2)Key Laboratory of Modern Engineering Surveying, SBSM, Shanghai 200092
(3)Department of Engineering Management, SCCAT, Deyang 618000

Abstract In this contributions we defined the model of mixed structured total least squares according to the mixed least squares-total least squares and proposed an iterative algorithm for the mixed structured total least squares problems, which solving by the nonlinear least squares adjustment theory. Three numerical examples are given at last, where assumes the errors of elements in observation vector equal, greater and less than the error of independent elements in coefficient matrix, respectively. It's shown that the method represented in this paper would be able to estimate the parameters theoretically closer to the true value and attain the more precise mean square error of weight unit than least squares and mixed least squares-total least squares, especially when the coefficient matrix which holds more errors than observation vector.

Key words: total least squares; mixed least squares-total least squares; mixed structured total least squares; parameters estimation

* 收稿日期:2012-12-31

基金项目:国家自然科学基金(41074017)

作者简介:胡川,男,1983年生,博士研究生,主要研究方向为大地测量数据处理. E-mail:sujsin@yahoo.com.cn

1 引言

经典平差理论通常采用假设系数矩阵不包含任何误差的最小二乘平差法,事实上系数矩阵并非不含任何误差^[1],为此在数据处理中需要引入总体最小二乘模型(TLS, Total Least Squares)来解决系数矩阵受误差干扰的问题^[1-6]。目前,从总体最小二乘法中已扩展出多种平差方法,如:混合最小二乘-总体最小二乘法(MLS-TLS, Mixed Least Squares-Total Least Squares)^[7]、加权总体最小二乘法^[7]、约束总体最小二乘法^[8]以及结构总体最小二乘法(STLS, Structured Total Least Squares)^[9],等等。在坐标转换参数估计当中^[1, 10, 11],系数矩阵可以分解成非误差干扰和误差干扰两部分,误差干扰部分的列向量中可能出现重复元素(或常数元素),即此部分列向量组成的矩阵具有结构特性。虽然 MLS-TLS 平差法能够同时估计出与系数矩阵中误差干扰部分和非误差干扰部分相对应的参数值,但是没有顾及误差干扰部分的结构特性和坐标非等精度观测的情况;加权和约束总体最小二乘只考虑了部分结构特性,即干扰部分列向量中的常数项以及非等精度观测情况;STLS 平差顾及了全部结构特性,但不能同时估计非误差干扰部分矢量对应的参数。因此,本文在 MLS-TLS 理论上将平差模型扩展到混合最小二乘-结构总体最小二乘情况,称为混合结构总体最小二乘(MLS-STLS, Mixed Least Squares-Structured Total Least Squares),使得能够估计系数矩阵中误差干扰部分和非误差干扰部分所对应的参数,并同时顾及误差干扰部分的结构特性和坐标非等精度观测的情况。

2 混合结构总体最小二乘模型

假设多维线性函数模型为,

$$(A + \Delta A)X = B + \Delta B \quad (1)$$

其中, $A \in R^{m \times n}$ 是系数矩阵, $\Delta A \in R^{m \times n}$ 是误差矩阵, $B \in R^{m \times d}$ 是观测数据矩阵, $\Delta B \in R^{m \times d}$ 是观测误差矩阵, $X \in R^{n \times d}$ 是参数矩阵。当 $d=1$ 时,如果 A 不包含误差,式(1)是经典最小二乘函数模型;如果 A 含有误差,则是总体最小二乘函数模型^[5];如果 A 中的部分列向量含有误差,其余列向量不含误差,式(1)是 MLS-TLS 函数模型^[7]。MLS-TLS 法比较特殊,目前多应用于系统识别领域^[12-15]。

根据文献[7],MLS-TLS 平差模型可以描述为:

$$\min_{[\tilde{A}_2; \tilde{B}] \in R^{m \times (n_2 + d)}} \| [A_2; B] - [\tilde{A}_2; \tilde{B}] \|_F \quad (2)$$

$$A_1 \hat{X}_1 + (A_2 + E_2) \hat{X}_2 = B + V \quad (3)$$

其中, $A_1 \in R^{m \times n_1}$ 由不含误差部分列向量组成, $A_2 \in R^{m \times n_2}$ 由含有误差部分列向量组成, $n = n_1 + n_2$, $X_1^T \in R^{d \times n_1}$ 与 A_1 相对应, $X_2^T \in R^{d \times n_2}$ 与 A_2 相对应。 \sim 表示最佳近似值, $\hat{\cdot}$ 表示最佳估计值, $E_2 \in R^{m \times n_2}$ 是受误差干扰部分系数矩阵对应的误差改正矩阵(向量), $V \in R^{m \times d}$ 是观测矩阵的误差改正矩阵。MLS-TLS 常采用基于 QR 和 SVD 分解的组合算法进行解算^[7]。

当同一元素在 A_2 中出现两次及以上时,如果仍采用 MLS-TLS 方法,这些重复元素不能得到相同的改正值。为保证其能获得相同改正数,对 E_2 加上与 A_2 结构一致性约束条件。此时,MLS-TLS 模型就变成 MLS-STLS 模型:

$$\min_{E_2, r} \| E_2; r \|_F \quad (1)$$

$$b - r = A_1 \hat{\xi}_1 + (A_2 - E_2) \hat{\xi}_2 \quad (2)$$

$$E_2 \text{ 和 } A_2 \text{ 保持相同结构} \quad (3)$$

式中 $d=1$, $b \in R^{m \times 1}$ 是观测向量, $r \in R^{m \times 1}$ 是其对应的误差改正向量, $\hat{\xi}_1$ 和 $\hat{\xi}_2$ 分别表示无误差部分和含误差部分系数矩阵对应的参数估计值, $\|\cdot\|_F$ 表示 Frobenius 范数条件。其随机模型表达为,

$$\begin{bmatrix} \Delta b \\ \Delta a_2 \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \right) \quad (4)$$

其中, $\Delta a_2 \in R^{q \times 1}$ 是 A_2 中非重复元素对应的随机误差向量, σ_0^2 是单位权方差, Q_1 和 Q_2 分别表示协因数矩阵。

3 算法推导

根据分析可知,采用基于 QR 和 SVD 分解法解算 MLS-STLS 问题,其结果不能满足条件③。因为 SVD 分解给系数矩阵中的常数元素赋予了本不应该有的误差改正值,不同位置的同一元素赋予了不同的误差改正值。根据文献[9, 16]可知:存在唯一的 e_2 与 E_2 相对应,即当知道 E_2 时便知道 e_2 ,反之亦然。它们有如下关系:

$$E_2 \hat{\xi}_2 = G_2 e_2 \quad (5)$$

式中, $G_2 \in R^{m \times q}$ 是由 $\hat{\xi}_2$ 中的元素构建而成,其结构见(27), e_2 中的元素来自于 E_2 中的非重复元素, q 表示非重复元素个数。则②可改写为

$$r = b - A_1 \hat{\xi}_1 - A_2 \hat{\xi}_2 + G_2 e_2 \quad (6)$$

此时 r 可由 $\hat{\xi}_1$ 和 e_2 来描述,当 $\hat{\xi}_1$ 和 e_2 被唯一确定后就有唯一的 r 值被确定。假设

$$\begin{cases} \hat{\xi}_1 = \hat{\xi}_1^0 + \Delta \xi_1 \\ \hat{\xi}_2 = \hat{\xi}_2^0 + \Delta \xi_2 \\ e_2 = e_2^0 + \Delta e_2 (E_2 = E_2^0 + \Delta E_2) \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6),有

$$r(\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2) = b - A_1(\xi_1^0 + \Delta\xi_1) - (A_2 - E_2^0)\xi_2^0 - (A_2 - E_2^0)\Delta\xi_2 + G_2^0\Delta e_2 \quad (8)$$

约去 $\Delta E_2\Delta\xi_2$ 项。根据公式(7)和(8)构成拉格朗日极值条件式,即

$$\Phi(r, e_2, \lambda, \mu, \Delta\xi_1, \Delta e_2) = r^T P_r r + e_2^T D P_2 e_2 + 2\lambda^T(r - b + A_1(\xi_1^0 + \Delta\xi_1) + (A_2 - E_2^0)\xi_2^0 + (A_2 - E_2^0)\Delta\xi_2 - G_2^0\Delta e_2) + 2\mu^T(e_2 - e_2^0 - \Delta e_2) \quad (9)$$

式中, D 是 A_2 中非重复元素的重复次数组成的对角矩阵。对公式(9)各量分别求偏导并令等于零,得:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{e}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2} = P_r \tilde{r} + \hat{\lambda} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial e_2} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{e}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2} = D P_2 \tilde{e}_2 + \hat{\mu} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{e}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2} = \tilde{r} - b + A_1(\xi_1^0 + \Delta\xi_1) + (A_2 - E_2^0)\xi_2^0 + (A_2 - E_2^0)\Delta\xi_2 - G_2^0\Delta e_2 = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{e}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2} = \tilde{e}_2 - e_2^0 - \Delta e_2 = 0 \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta\xi_1} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{e}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2} = A_1^T \hat{\lambda} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta\xi_2} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{e}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2} = (A_2 - E_2^0)^T \hat{\lambda} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial \Delta e_2} \Big|_{\tilde{r}, \tilde{e}_2, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2} = -G_2^{0T} \hat{\lambda} - \hat{\mu} = 0 \quad (16)$$

式中, $P_r = Q_r^{-1}$ 和 $P_2 = Q_2^{-1}$ 分别是目标坐标系和原坐标系坐标点的权矩阵。解公式(10)和(11)得:

$$\tilde{r} = -P_r^{-1} \hat{\lambda} \quad (17)$$

$$\tilde{e}_2 = -(D P_2)^{-1} \hat{\mu} \quad (18)$$

将式(17)和(18)分别代入式(12)和(13),有:

$$\hat{\lambda} = P_r \{ A_1(\xi_1^0 + \Delta\xi_1) + (A_2 - E_2^0)\xi_2^0 + (A_2 - E_2^0)\Delta\xi_2 - G_2^0\Delta e_2 - b \} \quad (19)$$

$$\hat{\mu} = -D P_2(e_2^0 + \Delta e_2) \quad (20)$$

将式(19)和(20)带入式(14)、(15)、(16)化简得:

$$\underbrace{A_1^T P_r A_1 \xi_1^0 + A_1^T P_r (A_2 - E_2^0) \xi_2^0 - A_1^T P_r b}_{W_1} + \underbrace{A_1^T P_r A_1 \Delta\xi_1}_{N_1} + \underbrace{A_1^T P_r (A_2 - E_2^0) \Delta\xi_2}_{M_1} - \underbrace{A_1^T P_r G_2^0 \Delta e_2}_{T_1} = 0 \quad (21)$$

$$\underbrace{(A_2 - E_2^0)^T P_r A_1 \xi_1^0 + (A_2 - E_2^0)^T P_r (A_2 - E_2^0) \xi_2^0 - (A_2 - E_2^0)^T P_r b}_{W_2} + \underbrace{(A_2 - E_2^0)^T P_r A_1 \Delta\xi_1}_{N_2} + \underbrace{(A_2 - E_2^0)^T P_r (A_2 - E_2^0) \Delta\xi_2}_{M_2} - \underbrace{(A_2 - E_2^0)^T P_r G_2^0 \Delta e_2}_{T_2} = 0 \quad (22)$$

$$\underbrace{G_2^{0T} P_r A_1 \xi_1^0 + G_2^{0T} P_r (A_2 - E_2^0) \xi_2^0 - G_2^{0T} P_r b - D P_2 e_2^0}_{W_3} + \underbrace{G_2^{0T} P_r A_1 \Delta\xi_1}_{N_3} + \underbrace{G_2^{0T} P_r (A_2 - E_2^0) \Delta\xi_2}_{M_3} - \underbrace{(G_2^{0T} P_r G_2^0 + D P_2) \Delta e_2}_{T_3} = 0 \quad (23)$$

解式(21)、(22)、(23)得

$$\begin{bmatrix} \Delta\xi_1 \\ \Delta\xi_2 \\ \Delta e_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & M_1 & -T_1 \\ N_2 & M_2 & -T_2 \\ N_3 & M_3 & -T_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -W_1 \\ -W_2 \\ -W_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

需要已知矩阵 G_2 才能完成参数解算。相关的算法可以参考文献[16]。在此给出平面坐标转换情况下的构建算法。由讨论知道

$$A_2 = \begin{bmatrix} x_{T1} & y_{T1} & \cdots & x_{Tk} & y_{Tk} \\ y_{T1} & -x_{T1} & \cdots & y_{Tk} & -x_{Tk} \end{bmatrix}^T \quad (25)$$

由非重复元素构成的向量为

$$\gamma = [x_{T1} \quad y_{T1} \quad \cdots \quad x_{Tk} \quad y_{Tk}]^T \quad (26)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} c & d & \cdots & 0 & 0 \\ -d & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & d \\ 0 & 0 & \cdots & -d & c \end{bmatrix}, \xi_2 = [c \quad d]^T \quad (27)$$

如果矢量 γ 中处于 (i, j) 位置的元素在矩阵 A_2 中处于 (k, l) 位置,则参数矢量 ξ_2 中处于 (l, j) 位置的元素在 G_2 的 (k, i) 位置,如果参数矢量中该位置元素负值与 A_2 中元素相等,则 G_2 中 (k, i) 位置的元素也为负数,反之亦然。所以可以通过该算法来恢复 E_2 矩阵。本文验后单位权中误差计算式采用

$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{(r^T P_r r + e_2^T D P_2 e_2) / (m - n)}$$

注意该验后单位权计算公式是整个系统的验后单位权误差估计公式,如果只针对非重复元素的验后单位权进行估计则将 D 矩阵从公式中去掉。

4 混合结构总体最小二乘算法设计

根据理论推导,设计其中一个算法如下:

输入观测矢量 b , 系数矩阵 A , 不受误差干扰列向量数目 t , 以及权矩阵 P_r 和 P_2 , 停止限差 ε ;

1) 将系数矩阵 A 分解成 A_1 和 A_2 两部份;

2) 假设 $E_2 = 0$, 采用加权最小二乘法算得初始值 ξ^0 , 并分解为 ξ_1^0 和 ξ_2^0 两部份, 利用 ξ_2^0 和给出的算法构建矩阵 G_2^0 ;

3) 计算 $W_1, W_2, W_3, N_1, N_2, N_3, M_1, M_2, M_3, T_1, T_2, T_3$, 并采用公式(24)计算参数 $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2$;

4) 根据参数估计值计算, $\hat{\xi}_1^{i+1} = \hat{\xi}_1^i + \Delta\xi_1^i, \hat{\xi}_2^{i+1} = \hat{\xi}_2^i + \Delta\xi_2^i, \hat{e}_2^{i+1} = \hat{e}_2^i + \Delta e_2^i, i = (1, 2, 3, \dots)$, 并依据求得的 $\hat{\xi}_2^{i+1}$ 和 \hat{e}_2^{i+1} 分别重新构建 G_2^0 和 E_2^0 ;

5) 重复3)和4)直到 $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2, \Delta e_2$ 同时小于指定限差 ε ;

输出估计参数 $\hat{\xi}_2, \hat{e}_2$ 以及单位权中误差 $\hat{\sigma}_0$ 。

5 实验与分析

为验证和分析本文方法,采用表1的数据进行

实验。

表 1 模拟实验坐标数据(单位:m)

Tab.1 Simulation data of coordinates (unit:m)

| | x_o | y_o | x_T | y_T |
|---|-------|-------|--------|-------|
| 1 | -10 | -10 | -24.99 | 33.81 |
| 2 | 10 | 20 | -28.21 | 24.42 |
| 2 | 20 | 20 | -10.02 | 22.38 |
| 4 | -20 | 10 | -16.78 | 39.39 |

设平移参数 $a = -20, b = 30$;尺度参数与旋转参数的乘积 $c = 0.059, d = 0.44$ 。模拟三个实验。

实验 1:给原坐标系坐标和目标坐标系坐标加上期望为零,中误差 $\sigma_1 = 1.2$ cm 的随机误差。分别采用 LS, MLS-TLS 和 MLS-STLS 进行计算,模拟 5 000次,模拟结果见表 2。

表 2 实验 1 的估计结果与模拟值之差(单位:m)

Tab.2 The difference between the estimate results and given value in case 1 (unit:m)

| | LS | MLS-TLS | MLS-STLS |
|------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| a | -1.11×10^{-4} | -1.11×10^{-4} | -1.11×10^{-4} |
| b | -5.73×10^{-5} | -5.73×10^{-5} | -5.73×10^{-5} |
| c | -1.27×10^{-6} | -1.25×10^{-6} | -1.26×10^{-6} |
| d | 1.24×10^{-6} | 1.36×10^{-6} | 1.31×10^{-6} |
| $\hat{\sigma}_0$ | 0.012 3 | 0.011 3 | 0.011 8 |

分析表 2 不难发现三种方法获得的参数估计结果几乎完全相同。验后单位权中误差估计结果显示,LS-TLS 的最小,MLS-TLS 的次之,LS 的最大;MLS-STLS 的结果与验前值更为接近。当去掉 D 矩阵以后获得的验后单位权中误差与给定值完全相同。

表 3 为 MLS-STLS 和 MLS-TLS 方法获得的系数矩阵改正矩阵(部分)。从表 3 可以看出 MLS-STLS 方法获得的改正矩阵保证了相同元素获得相同改正(绝对值),而 MLS-TLS 则不能,这解释为什么 MLS-TLS 法获得的验后中误差偏小,同时说明基于 SVD 和 QR 分解的 MLS-TLS 法解算结构性问题不能得到合理结果。

表 3 系数改正矩阵元素比较

Tab.3 Comparing the value in correction coefficient matrix A on different position for the identical element

| | 矩阵元素 | |
|----------|-------------------------------|-------------------------------|
| MLS-STLS | $2.131\ 279 \times 10^{-3}$ | $7.569\ 754 \times 10^{-3}$ |
| | $7.569\ 754 \times 10^{-3}$ | $-2.131\ 279 \times 10^{-3}$ |
| | $1.228\ 889 \times 10^{-2}$ | $-1.533\ 615 \times 10^{-2}$ |
| | $-1.533\ 615 \times 10^{-2}$ | $-1.228\ 889 \times 10^{-2}$ |
| | $8.502\ 439 \times 10^{-3}$ | $6.389\ 358 \times 10^{-7}$ |
| MLS-TLS | $6.389\ 358 \times 10^{-7}$ | $4.801\ 433 \times 10^{-6}$ |
| | $-1.950\ 470 \times 10^{-3}$ | $-1.465\ 726 \times 10^{-2}$ |
| | $-8.688\ 883 \times 10^{-17}$ | $-6.529\ 466 \times 10^{-16}$ |

实验 2:给原坐标系加中误差 $\sigma_{21} = 2$ mm 的随机误差;目标坐标系加中误差 $\sigma_{22} = 3$ cm 的随机误差。1 mm 作为先验单位权中误差,采用 LS 和 MLS-STLS 法模拟计算 5 000 次,计算结果见表 4(由于目前还没有 MLS-TLS 加权情况的计算方法,因此本文在此没有考虑与其计算结果的比较,下同)。

实验 3:给原坐标系加中误差 $\sigma_{21} = 3$ cm 的随机误差;目标坐标系加中误差 $\sigma_{22} = 2$ mm 的随机误差,并同样以 1 mm 作为先验单位权中误差,采用 LS 和 MLS-STLS 模拟计算 5 000 次,计算结果见表 4。

表 4 方案 2 和方案 3 的平差结果比较(单位:m)

Tab.4 Comparing the results in case 2 and case 3 (unit:m)

| | LS | MLS-STLS | LS | MLS-STLS |
|------------|-----------|-------------|-----------|-----------|
| a | -19.999 9 | -19.999 9 | -20.000 1 | -20.000 1 |
| b | 30.000 0 | 30.000 0 | 29.999 8 | 29.999 8 |
| c | 0.059 025 | 0.059 025 | 0.058 997 | 0.058 997 |
| d | 0.440 011 | 0.440 011 3 | 0.439 997 | 0.439 998 |
| δ_1 | 0.000 948 | 0.000 948 | 0.006 322 | 0.001 313 |

从表 4 不难发现,在实验 2 中,LS 方法和 MLS-STLS 方法获得的参数估计值完全相同,说明就参数估计而言,两种方法等价。MLS-STLS 获得的验后中误差随模拟次数变化如图 1 所示。从图 1 可以发现,模拟过程稳定,符合统计规律。将两种方法获得的验后单位权中误差平均值列于表 4 的最后一行,可见 MLS-STLS 获得的系统验后单位权中误差较 LS 小,系统估计精度相对较高。

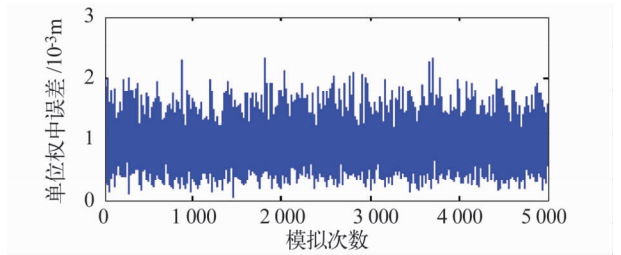


图 1 实验 2 中 MLS-STLS 法验后单位权中误差变化过程

Fig.1 The change in posterior variance of unit weight for MLS-STLS along the simulation times in case 2

为进一步说明问题,在实验 3 将大部分误差增加到原坐标系中,将估计结果同样列于表 4。两种方法获得平移参数完全相同,但是旋转参数与尺度参数乘积量就不再完全相等,MLS-STLS 方法获得估计值更接近于模拟值。同时 MLS-STLS 获得验后单位权中误差远小于 LS 法。说明 MLS-STLS 方法较 LS 法具有更高的估计精度,特别是当系数矩阵误差大于观测误差时。

验后单位权中误差曲线图(图2)说明,在加权情况下本文给出的方法也比较稳定。

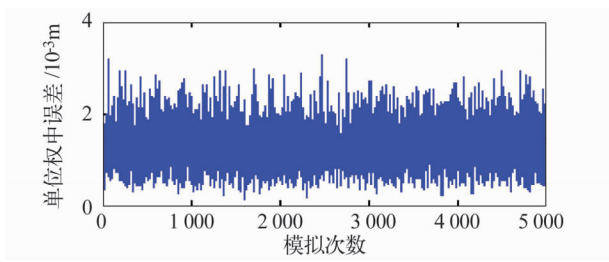


图2 实验3中MLS-STLS法验后单位权中误差变化过程
Fig.2 The change in posterior variance of unit weight for MLS-STLS along the simulation times in case 3

6 总结

混合结构总体最小二乘参数估计法不仅能够一次性估计出系数矩阵不受误差干扰部分的参数和受误差干扰部分的参数,还能够保证受误差干扰部分的系数矩阵中相同元素获得相同的改正值,这在理论上比最小二乘法和混合最小二乘-总体最小二乘法都要严密。

在系数矩阵非常数列中非重复元素所受误差干扰量大于观测矢量受误差干扰量时,混合结构总体最小二乘参数平差法的参数和单位权中误差估计结果明显更接近于真实值。

本文给出的单位权中误差计算方法更简便,在加权情况下优势更加明显。

参 考 文 献

1 陈义,陆珏,郑波. 总体最小二乘方法在空间后方交会中的应[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2008, 33(12): 1 271 - 1 274. (Chen Yi, Lu Yu and Zheng Bo. Application of total least squares to space resection[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2008, 33(12): 1 271 - 1 274)

2 鲁铁定,周世健. 总体最小二乘的迭代解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2010, 35(11): 1 351 - 1 354. (Lu Tieding and Zhou Shijian. An iteration for the total least squares estimation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(11): 1 351 - 1 354)

3 Felus Y A and Schaffrin B A. Total least-squares approach in two stages for semivariogram modeling of aeromagnetic data [J]. GIS and Spatial Analysis, 2005, :215 - 220.

4 Golub G and Van Loan C. Total least squares[J]. Smoothing Techniques for Curve Estimation, 1979, 69 - 76.

5 Golub G H and Van Loan C F. An analysis of the total least squares problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17(6): 883 - 893.

6 Adcock R J. Note on the method of least squares[J]. The Analyst, 1877, 4: 183 - 194.

7 Van Huffel S and Vandewalle J. The total least squares problem: computational aspects and analysis[M]. Society for Industrial Mathematics, 1991.

8 Abatzoglou T and Mendel J. Constrained total least squares [A]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing[C]. 1987:1 485 - 1 488.

9 De Moor B. Structured total least squares and L2 approximation problems [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1993, 188:163 - 205.

10 陈玮娴,等. 约束总体最小二乘在点云拼接中的应用 [J]. 大地测量与地球动力学, 2011, (2): 137 - 141. (Chen Weixian, et al. Application of constrained total least squares to cloud point registration[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2011, (2): 137 - 141)

11 陆珏,等. 加权总体最小二乘方法在ITRF转换中的应用 [J]. 大地测量与地球动力学, 2011, (4): 84 - 89. (Lu Jue, et al. Application of weighted total least squares in ITRF transformation[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics, 2011, (4): 84 - 89)

12 Ramos J A and Verriest E I. Total least squares fitting of two point sets in Md [A]. Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control[C]. 1997, 5: 5 048 - 5 053.

13 Dunne B E and Williamson G A. QR-based TLS and mixed LS-TLS algorithms with applications to adaptive IIR filtering [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, 51(2): 386 - 394.

14 Pachner D, et al. System identification using mixed total least squares by rotating the system of coordinates [A]. Modeling, Identification, and Control[C]. 2005.

15 Yan S and Fan J. The solution set of the mixed LS-TLS problem[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2001, 77(4): 545 - 561.

16 Van Huffel S, Park H and Rosen J B. Formulation and solution of structured total least norm problems for parameter estimation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1996, 44(10): 2 464 - 2 474.