

# 北斗广播星历参数拟合及精度分析<sup>\* 1</sup>

王 乐<sup>1)</sup> 贾小林<sup>2)</sup>

(1) 长安大学地质工程与测绘学院, 西安 710064  
(2) 西安测绘研究所, 西安 710054

**摘 要** 根据 GPS ICD 文档中定义的一组 18 参数广播星历模型及其用户算法推导了三维坐标对各参数的偏导数表达式,建立了 18 参数和卫星位置矢量之间的线性函数模型,利用最小二乘平差原理计算北斗卫星 18 参数广播星历,分别通过北斗卫星定轨数据对算法进行测试,结果验证了算法的正确性,同时证明在 4 小时之内,拟合误差优于 0.01 m。

**关键词** 北斗卫星;用户算法;拟合分析;GPS ICD 文档;18 参数广播星历模型

**中图分类号:**P207 **文献标识码:**A

## BROADCAST EPHEMERIS PARAMETER FITTING AND PRECISION ANALYSIS OF BEIDOU SATELLITE

Wang Le<sup>1)</sup> and Jia Xiaolin<sup>2)</sup>

(School of Geology Engineering and Geomatics, Chang'an University, Xi'an 710054)  
(Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, Xi'an 710054)

**Abstract** The GPS ICD document defined a new group of 18 parameters broadcast ephemeris model, according to the user algorithm of this new parameter model, the partial derivative expression of each parameter is derived, and the linear function model is established between the 18 parameters and satellite position vector. In order to test this algorithm, the Beidou satellite orbit determination data are used to calculate the 18 parameters of Beidou satellite broadcast ephemeris by the principle of least-squares adjustment. The result verified the correctness of the algorithm, and simultaneously proved 4 hours fitting error is better than 0.01 m.

**Key words:** Beidou satellite; user algorithm; broadcast ephemeris parameter; fitting analysis; GPS ICD document; 18 parameters broadcast ephemeris model

## 1 引言

众所周知,获取卫星的位置和速度是进行导航定位的前提条件,而卫星的位置和速度又是由卫星的广播星历参数来表征的。因此,研究导航卫星广播星历参数的生成算法,对于提高卫星导航定位的精度具有非常重要的应用价值。

通常所用的广播星历模型是以美国的 GPS 为代表的 16 参数模型,已经有很多学者对 GPS 16 参数模型的拟合算法的效率和精度进行了深入研究<sup>[1-3]</sup>,然而在最新发布的 GPS ICD 文档中定义了一组最新的 18 参数广播星历,对广播星历 18 参数拟合算法进行分析研究和实际数据测试,能够检验这种新型星历模型的有效性。

\* 收稿日期:2013-04-08

作者简介:王乐,女,1988 年生,硕士研究生,研究方向为卫星定轨。E-mail:815557438@qq.com

## 2 北斗导航卫星广播星历 18 参数拟合算法

18 参数广播星历以开普勒轨道根数加摄动参数的形式给出,与 GPS 广播星历 16 参数比较起来在长半轴、平均角速度、升交点赤经的计算方法存在差异。

### 2.1 18 参数广播星历偏导数的推导

利用 18 参数的用户算法<sup>[4,5]</sup>计算  $t_k$  时刻地面点在地固直角坐标系中的坐标为:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \mathbf{r}_k \begin{bmatrix} \cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k \\ \cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k \\ \sin u_k \sin i_k \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{r}_k = A_k(1 - e \cos E_k) + \delta r_k$  为经过摄动改正后的向径,  $u_k = \Phi_k + \delta u_k$  为经过摄动改正的纬度参数,  $i_k = i_0 + \dot{i} t_k + \delta i_k$  是经过摄动改正后的轨道倾角,  $\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e t_{oe}$ ,  $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_{ref} + \Delta \dot{\Omega}$ ,  $\Omega_k$  为考虑地球自转参数的升交点经度。由于广播星历参数较多,逐一推导工作量很大,以  $\Delta A$  的推导过程为例进行说明:

$$\frac{\partial X}{\partial \Delta A} = \frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}_k} \frac{\partial \mathbf{r}_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial X}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial X}{\partial i_k} \frac{\partial i_k}{\partial \Delta A} \quad (2)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}_k} = \cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k \quad (3)$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_k} = -\sin u_k \cos \Omega_k - \cos u_k \cos i_k \sin \Omega_k \quad (4)$$

$$\frac{\partial X}{\partial i_k} = \cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \sin i_k \sin \Omega_k \quad (5)$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} = \frac{\partial r_k}{\partial A_k} \frac{\partial A_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial r_k}{\partial E_k} \frac{\partial r_k}{\partial \delta r_k} \frac{\partial \delta r_k}{\partial \Delta A} = (1 - e \cos E_k) +$$

$$A_k e \sin E_k \frac{1}{1 - e \cos E_k} \left( -\frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu}{A_0^5}} t_k + 2(c_{rs} \cos 2\Phi_k - c_{rc} \sin 2\Phi_k) \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} \left( -\frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu}{A_0^5}} t_k \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial \Delta A} = \frac{\partial u_k}{\partial \Phi_k} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial u_k}{\partial \delta u_k} \frac{\partial \delta u_k}{\partial \Delta A} = [1 + 2(c_{us} \cos 2\Phi_k - c_{uc} \sin 2\Phi_k)] \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} \left( -\frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu}{A_0^5}} t_k \quad (7)$$

$$\frac{\partial i_k}{\partial \Delta A} = \frac{\partial i_k}{\partial \delta i_k} \frac{\partial \delta i_k}{\partial \Delta A} = 2(c_{is} \cos 2\Phi_k - c_{ic} \sin 2\Phi_k) \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} \left( -\frac{3}{2} \right) \sqrt{\frac{\mu}{A_0^5}} t_k \quad (8)$$

由于调和项系数  $c_{us}$ 、 $c_{uc}$  为  $10^{-6}$  级的小量,  $c_{is}$ 、 $c_{ic}$  为  $10^{-8}$  级的小量,  $c_{rs}$ 、 $c_{rc}$  也最多达到  $10^2$  量级,  $e$  为  $10^{-3}$  量级, 则  $\frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e \cos E_k)^2} \approx 1$ , 于是  $\sqrt{\frac{\mu}{A_0^5}}$  为  $10^{-12}$  级的小量, 再加上我们一般选择拟合时段不超过 4 小

时, 即  $t_k \leq 14\,400$  s, 所以式(6)可简化为:

$$\frac{\partial r_k}{\partial \Delta A} = \frac{\partial r_k}{\partial A_k} \frac{\partial A_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial r_k}{\partial E_k} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta A} + \frac{\partial r_k}{\partial \delta r_k} \frac{\partial \delta r_k}{\partial \Delta A} \approx \frac{\partial r_k}{\partial A_k} \frac{\partial A_k}{\partial \Delta A} = (1 - e \cos E_k) \quad (9)$$

同理, 式(2)可简化为:

$$\frac{\partial X}{\partial \Delta A} = (1 - e \cos E_k) (\cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k) \quad (10)$$

以上推导方法及所作的近似同样适用  $\frac{\partial Y}{\partial \Delta A}$ 、 $\frac{\partial Z}{\partial \Delta A}$

及其他参数偏导数的推导。综上所述:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \Delta A} = (1 - e \cos E_k) \begin{bmatrix} \cos u_k \cos \Omega_k - \sin u_k \cos i_k \sin \Omega_k \\ \cos u_k \sin \Omega_k + \sin u_k \cos i_k \cos \Omega_k \\ \sin u_k \sin i_k \end{bmatrix} \quad (11)$$

其余 16 个参数的偏导数表达式可参考文献[5]。上述过程表明在推导广播星历 18 参数偏导数的过程中忽略了调和项对偏导数的影响, 经算例验证这种忽略调和项的算法是切实可行的。

### 2.2 广播星历 18 参数的最小二乘拟合

根据已知的广播星历用户算法, 卫星坐标与星历参数可表示成

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}(\Delta A, \dot{A}, e, i_0, \dot{i}, \Omega_0, \Delta \dot{\Omega}, \omega, M_0, \Delta n_0, \Delta \dot{n}_0, c_{us}, c_{uc}, c_{rs}, c_{is}, c_{ic}) \quad (12)$$

将式(12)在  $t_{oe}$  时刻处进行泰勒级数展开, 舍掉二阶和二阶以上的小量后得到的线性化表达式为:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}_0 + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \Delta A} \delta \Delta A + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \dot{A}} \delta \dot{A} + \cdots + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial c_{is}} \delta c_{is} + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial c_{ic}} \delta c_{ic} \quad (13)$$

式中  $\mathbf{F}_0 = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}$  为坐标近似值, 在拟合开始之前需给

定参数一组近似值, 近似值的选取是通过  $t_{oe}$  时刻的坐标和速度严格按照二体问题求解出来的 6 个开普勒轨道参数, 并分别将它们作为  $A_{ref}$ 、 $\Delta A$ 、 $e$ 、 $i_0$ 、 $\Omega_0$ 、 $\omega$ 、 $M_0$  的近似值, 其余的 11 个参数近似值取为 0, 利用这组近似值计算出  $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \Delta A}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \dot{A}}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial c_{is}}$ 、 $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial c_{ic}}$  的值, 组成误差方程为

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{B}_i \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L}_i \quad (14)$$

$$\text{式中, } \mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} V_{X_i} \\ V_{Y_i} \\ V_{Z_i} \end{bmatrix}, \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_i}{\partial \Delta A} & \frac{\partial X_i}{\partial \dot{A}} & \cdots & \frac{\partial X_i}{\partial c_{ic}} \\ \frac{\partial Y_i}{\partial \Delta A} & \frac{\partial Y_i}{\partial \dot{A}} & \cdots & \frac{\partial Y_i}{\partial c_{ic}} \\ \frac{\partial Z_i}{\partial \Delta A} & \frac{\partial Z_i}{\partial \dot{A}} & \cdots & \frac{\partial Z_i}{\partial c_{ic}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} X_{i0} - X_i \\ Y_{i0} - Y_i \\ Z_{i0} - Z_i \end{bmatrix}, \Delta \mathbf{X} = (\delta \Delta A, \delta \dot{A}, \dots, \delta c_{is}, \delta c_{ic})^T$$

设现在在  $K(K \geq 6)$  个历元, 则误差方程为

$$\mathbf{V} = \mathbf{B} \Delta \mathbf{X} + \mathbf{L} \quad (15)$$

$$\text{式中 } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_K \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_K \end{bmatrix}, \mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_K \end{bmatrix}$$

根据最小二乘原理有:

$$\Delta \mathbf{X} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{L} \quad (16)$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X} \quad (17)$$

式中  $\mathbf{X}_0 = (\Delta A_0, \dot{A}_0, \dots, c_{ic0})^T$  为参数初值。

为了提高参数拟合的精度, 通常需进行循环迭代, 迭代时将上一次计算结果作为下一次迭代的初值, 则第  $i$  次计算结果为:

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i-1} + \Delta \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \Delta A_{i-1} + \delta \Delta A_i \\ \dot{A}_{i-1} + \delta \dot{A}_i \\ \vdots \\ c_{ic_{i-1}} + \delta c_{ic_i} \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中  $\Delta \mathbf{X}_i$  为第  $i$  次平差的改正数,  $\mathbf{X}_{i-1}$  为第  $(i-1)$

次的计算结果。  $\sigma = \sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{V}}{3K-17}}$  为拟合的单位权方

差, 也是判断迭代收敛的条件, 当  $\sqrt{\frac{\mathbf{V}^T \mathbf{V}}{3K-17}} \leq \sigma_0$  认

为迭代收敛, 此时  $\sigma_0$  表示迭代收敛的绝对阈值。由于该条件较为严格, 采用  $|\sigma_{n+1} - \sigma_n| \leq \sigma_0$  作为迭代终止条件。此时  $\sigma_0$  为迭代收敛的相对阈值。

### 3 算例及分析

采用北斗卫星 2012-09-03—06 日的采样间隔为 5 分钟的精密轨道数据 (三维坐标值和三维速度值) 分别对 GEO、MEO 和 IGSO 卫星的 18 参数广播星历进行拟合。

该组精密轨道数据是利用长春、乌鲁木齐、喀什、临潼和昆明 5 个国内跟踪站以及 8 个境外站的接收机, 连续对各阶段入网的 11 颗卫星进行观测, 获取伪距、相位数据, 通过事后精密定轨得到的在轨卫星精密星历, 通过重叠弧段统计其精度为: 径向平均误差为 0.46 m, 切向平均误差为 2.62 m, 法向平均误差为 1.39 m。

为了分析拟合精度, 我们分别统计了用 6 个至 61 个已知点拟合 17 参数的精度值, 本文采用的精

度指标为用户测距误差 (URE):

$$URE = \sqrt{0.02(\Delta X^2 + \Delta Y^2) + 0.96\Delta Z^2} \quad (19)$$

图 1~3 分别表示 MEO、GEO、IGSO 卫星 18 参数拟合精度随拟合点数增加的变化情况。从图中可以明显看出三种卫星整体拟合 URE 随着拟合已知点的增加而增大, 但是当已知点个数在 50 个 (约 4 小时) 之内时拟合误差增速较慢, 而已知点个数大于 50 个 (约 4 小时) 时, 拟合精度发散速度急剧增大。同时在已知点个数小于 50 个时, 对于 GEO 和 IGSO 卫星的参数拟合精度变化呈现出约 1 小时的周期性。

表 1~3 分别罗列了 MEO、GEO、IGSO 前 10 组不同长时的拟合结果。从表中可以看出, 三种卫星的参数拟合精度在拟合时长为 2 小时和 3 小时时最为均匀, 保持在 3 mm 左右, 随着拟合时长的增加拟合精度下降速度增大, 当拟合时长为 4 小时, 拟合误差最大为 7 mm, 当拟合时长为 5 小时, 拟合误差最大达 3 cm。

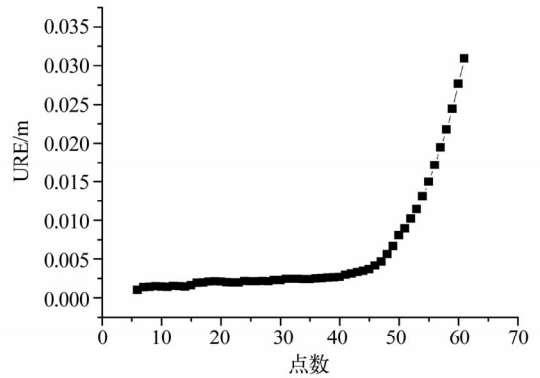


图 1 MEO 卫星拟合 URE 随拟合点数变化图

Fig. 1 Fitting URE of MEO satellite changed with the fitting point numbers

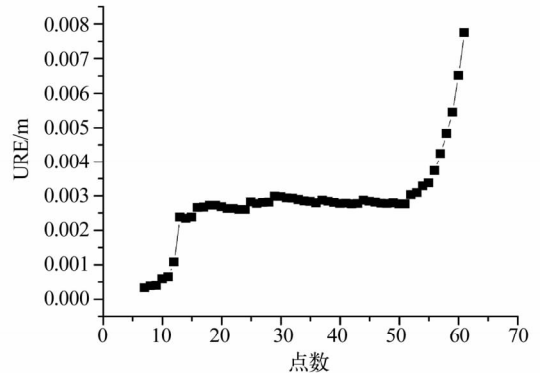


图 2 GEO 卫星拟合 URE 随拟合点数变化图

Fig. 2 Fitting URE of GEO satellite changed with the fitting point numbers

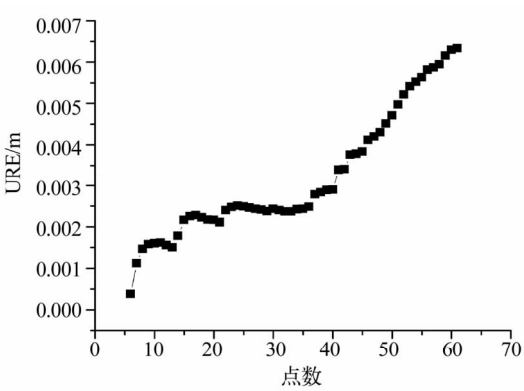


图3 IGSO 卫星拟合 URE 随拟合点数变化图

Fig.3 Fitting URE of IGSO satellite changed with the fitting point numbers

表 1 MEO 卫星不同拟合时长拟合 URE 表

Tab.1 Fitting URE of MEO satellite with different length of time

组数	拟合时长(小时)				
	1	2	3	4	5
1	0.001 5	0.002 1	0.002 5	0.006 7	0.030 9
2	0.002 2	0.002 8	0.003 3	0.006 9	0.025 8
3	0.002 4	0.002 5	0.003 2	0.004 6	0.009 4
4	0.002 0	0.002 5	0.002 9	0.006 7	0.025 7
5	0.002 0	0.002 3	0.002 9	0.006 3	0.014 6
6	0.002 1	0.002 5	0.002 7	0.003 6	0.013 7
7	0.002 3	0.002 3	0.002 7	0.005 3	0.015 1
8	0.001 5	0.002 5	0.002 5	0.003 9	0.005 3
9	0.002 6	0.002 3	0.002 4	0.003 0	0.005 2
10	0.001 5	0.002 0	0.002 1	0.002 9	0.009 2

表 2 GEO 卫星不同拟合时长拟合 URE

Tab.2 Fitting URE of GEO satellite with different length of time

组数	拟合时长(小时)				
	1	2	3	4	5
1	0.002 4	0.002 8	0.002 9	0.002 8	0.007 8
2	0.002 3	0.002 6	0.002 7	0.004 5	0.018 2
3	0.001 7	0.002 3	0.002 8	0.006 1	0.022 6
4	0.002 5	0.002 5	0.002 7	0.006 6	0.018 1
5	0.001 6	0.002 3	0.002 6	0.003 6	0.006 4
6	0.001 8	0.002 6	0.002 6	0.002 6	0.009 8
7	0.002 2	0.002 5	0.002 4	0.005 4	0.022 6
8	0.002 0	0.002 0	0.002 3	0.007 7	0.026 7
9	0.001 4	0.001 9	0.003 2	0.007 0	0.018 7
10	0.001 5	0.002 2	0.002 3	0.003 6	0.005 0

表 3 IGSO 卫星不同拟合时长拟合 URE

Tab.3 Fitting URE of IGSO satellite with different length of time

组数	拟合时长(小时)				
	1	2	3	4	5
1	0.001 5	0.002 5	0.002 8	0.004 5	0.006 3
2	0.001 9	0.002 6	0.002 8	0.002 8	0.009 1
3	0.001 8	0.002 6	0.002 5	0.005 3	0.017 6
4	0.002 7	0.002 6	0.003 0	0.005 6	0.018 6
5	0.001 4	0.002 5	0.002 9	0.005 9	0.014 3
6	0.003 0	0.002 8	0.002 7	0.003 5	0.004 9
7	0.002 2	0.002 2	0.002 2	0.002 4	0.007 6
8	0.001 8	0.002 0	0.002 3	0.003 8	0.014 9
9	0.002 0	0.002 3	0.002 5	0.005 6	0.015 8
10	0.002 6	0.002 6	0.002 9	0.004 1	0.008 0

4 结论

- 1)算例验证了本文推导的广播星历参数拟合算法以及偏导数公式是正确的,且这种新型的广播星历18 参数模型同样适用于北斗卫星导航定位系统;
- 2)当拟合时间不超过 4 小时,各类卫星拟合精度优于 0.01 米,完全可以满足实时导航定位的精度要求。但需要注意的是当拟合时段如果小于 1 小时,在迭代计算时部分参数拟合误差增大,拟合迭代次数增加,甚至出现迭代不收敛情况,因此拟合时段需大于 1 小时结果才有效;
- 3)此种拟合算法的内部精度稳定,且随着拟合时间的增长拟合精度逐步下降。

参 考 文 献

1 崔先强,焦文海,贾小林. GPS 广播星历参数拟合算法[J]. 测绘学院学报,2004,21(4):244 – 246. (Cui Xian-qiang,Jiao Wenhai and Jia Xiaolin. GPS broadcast ephemeris parameter fitting algorithm[J]. Journal of Institute of Surveying and Mapping,2004,21(4):244 – 246)

2 戴晓蕾,等. GPS 两种广播星历参数拟合及外推精度分析[J]. 大地测量与地球动力学,2013. (1):53 – 58. (Dai Xiaolei, et cl. Accuracy analysis of two GPS broadcast ephemeris fitting and extrapolation algorithm[J]. Journal of Geodesy and Geodynamics,2013,(1):53 – 58)

3 陈留成,唐波. 参考系选择对 Kepler 广播星历参数拟合精度的影响[J]. 飞行器测控学报,2006,25(4):19 – 25. (Chen Liucheng and Tang Bo. Impact of reference system choice on Kepler fitting of broadcast ephemeris earameters precision[J]. Journal of Aircraft Control, 2006,25(4):19 – 25)