附录 A　复经验正交函数法(CEOF)

根据文献[1]归纳了 CEOF 法的主要思路。

首先要构建一个复观测序列。一个随时间变化的序列 $x_j(t)$的傅里叶展开可表示为：

$$x_j(t) = \sum_{\omega}[a_j(\omega)\cos(\omega t) + b_j(\omega)\sin(\omega t)] \tag{1}$$

式中，j 代表观测点位置，t 是观测时间，ω 为傅里叶频率。为了描述观测时间序列的传播特征，观测向量可表示为：

$$\boldsymbol{X}_j(t) = \sum_{\omega} c_j(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \tag{2}$$

式中，$c_j(\omega) = a_j(\omega) + \mathrm{i}b_j(\omega)$，$\mathrm{i}^2 = -1$。式(2)可写为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_j(t) = &\sum_{\omega}[a_j(\omega)\cos(\omega t) + b_j(\omega)\sin(\omega t)] + \\ &\mathrm{i}[b_j(\omega)\cos(\omega t) - a_j(\omega)\sin(\omega t)] = \\ &x_j(t) + \mathrm{i}\hat{x}_j(t)\end{aligned} \tag{3}$$

式(3)中的实部是原始观测时间序列，虚部是实部的 Hilbert 变换，它的振幅与 $x_j(t)$ 一样，只是相位前移 $\pi/2$。

其次，对每个观测点的观测向量减去其平均值，并除以标准偏差，进行标准化后，得到复相关矩阵可表示为：

$$\boldsymbol{r}_{j,k} = [\boldsymbol{X}_j(t)^* \boldsymbol{X}_k(t)]_t \tag{4}$$

式中，$\boldsymbol{r}_{j,k}$ 为第 j 个与第 k 个观测点之间的复相关系数，* 为复数共轭，$[\cdots]_t$ 为时间上的平均。

第三，对复相关矩阵进行特征值 λ_n 的分析，并求复特征向量 $\boldsymbol{e}_{jn}$。

第四，复观测向量 $\boldsymbol{X}_j(t)$ 可分解为各个主成分贡献之和：

$$\boldsymbol{X}_j(t) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{e}_{jn}^* \boldsymbol{P}_n(t) \tag{5}$$

式中，$\boldsymbol{P}_n(t)$ 为复主成分，求和权重为复特征向量的共轭。用复相关系数矩阵的最少复特征向量 $\boldsymbol{e}_{jn}$ 和复主成分 $\boldsymbol{P}_n(t)$ 来压缩信息。因为复相关系数矩阵(式(4))是一个 Hermitian 矩阵，它具有 n 个实特征值 λ_n，第 j 个主成分的贡献率可表示为：

$$\lambda_j / \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tag{6}$$

对应于第 n 个主成分，空间模态用复特征向量的实部表示，相位信息是由复特征向量的实部和虚部表示的，$\boldsymbol{P}_n(t)$ 是取原始观测时间序列在特征向量 $\boldsymbol{e}_{jn}$ 上的投影，其实部表示时间模态。

参考文献

[1]　Horel J D. Complex Principal Component Analysis: Theory and Examples[J]. Journal of Climate and Applied Meteorology, 1984, 23: 1 660-1 673