第34卷第6期 大地测量与地球动力学 Vol. 34 No. 6
2014年12月 JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS Dec. ,2014

文章编号:1671-5942(2014)06-0135-05

自适应谱修正 LU 分解法解算高病态法方程[*1]

邓兴升　孙虹虹

(长沙理工大学测绘工程系,长沙　410004)

摘　要　谱修正迭代算法及其改正算法均没有很好地解决收敛速度与降低矩阵病态性之间的矛盾,且改进算法的阻尼因子缺乏有效的确定方法。针对该问题,提出自适应谱修正 LU 分解算法。该算法基于谱修正方程,采用 LU 分解法解算法方程,回避了矩阵求逆问题;在迭代过程中,阻尼因子不固定,而是根据残差下降速度自适应地调整其大小。该算法能极大降低高病态法方程的解算迭代次数,提高收敛速度和计算精度。

关键词　自适应;谱修正算法;LU 分解;高病态矩阵;法方程

中图分类号:P207　　**文献标识码:**A

SELF-ADAPTIVE SPECTRUM CORRECTION LU DECOMPOSITION ALGORITHM FOR SOLVING A NORMAL EQUATION WITH SEVERELY ILL-CONDITIONED MATRIX

Deng Xingsheng and Sun Honghong

(*Department of Surveying Engineering, Changsha University of Science & Technology, Changsha*　410004)

Abstract　The spectrum correction iterative algorithm and its correction algorithm are not a good solution to serious ill-posed problem, for the contradiction between convergent speed and ill-condition reducing is difficult to deal with. At currently, the damping factor used by the improved algorithm still lacks an effective method to determinate. Aiming at this problem, the self-adaptive spectrum correction LU decomposition algorithm was proposed in the paper. The algorithm, which based on the spectrum correction equation, can avoid the matrix inverse problem by using the LU decomposition method for solving a normal equation. In the process of iteration, the damping factor is not fixed, and its value is adjusted adaptively according to the rate of residual decline. Examples show that, the algorithm can greatly reduce the iteration times to solve a normal equation with severely ill-conditioned matrix, and it also enhances the convergent speed and calculation accuracy greatly.

Key words: self-adaptive; spectrum correction iteration algorithm; LU decomposition; severely ill-conditioned matrix; normal equation.

现代 GNSS 快速高精度动态定位时,由于 GNSS 卫星属高轨卫星,运动角速度较小,若同步观测的时段不够长,所观测卫星的几何分布变化很小,从而使观测站至卫星间的距离变化很小,同一卫星不同历元的观测方程相似,由这样的观测方程组成的法方程呈现严重病态性,可靠性很差[1-3]。对于病态矩

* **收稿日期:**2013-12-30

基金项目:湖南省国土资源厅科研项目(2013-27);湖南省教育厅科研项目(13C1011);湖南省科技计划项目(2014TF2005);特殊环境道路工程湖南省重点实验室开放基金项目(kfj120405)。

作者简介:邓兴升,男,1971 年生,高级工程师,博士,硕士生导师,主要从事高精度 GNSS 动态定位与变形监测研究。E-mail:whudxs@163.com。

阵或不适定问题,出现了许多正则化方法[4-11]。病态或不适定问题的正则化方法存在以下问题:一是破坏方程的等量关系;二是正则化估计解是有偏的[5];三是正则化因子的确定比较困难。

谱修正迭代算法[12-15]针对岭估计有偏及岭参数确定困难的问题,改善了法方程的病态性,且不改变方程的等量关系,也不附加任何条件,理论上迭代总是收敛于最优解,因而是解决病态问题的较好算法[1-3,16-19]。该算法尽管具有无偏的良好性质,且理论上是严谨的,但在实际中,收敛效果不理想,速度很慢[18-19],甚至在有限迭代步数内不收敛。文献[18-19]对谱修正算法的收敛性进行分析,并进行加阻尼因子的改进,但都没有提出阻尼因子如何确定。本文针对高病态法方程的解算提出“自适应谱修正 LU 分解算法”,研究谱修正迭代算法的进一步改进及阻尼因子的动态确定问题。

1 自适应谱修正 LU 分解算法

在最小二乘问题中,法方程的解为:

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}) \tag{1}$$

式中,$\boldsymbol{X}$ 为待估参数,$\boldsymbol{B}$ 为误差方程系数阵,$\boldsymbol{P}$ 为观测值的权,$\boldsymbol{L}$ 为误差方程常数项。式(1)对 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 求逆时,可能因病态矩阵而没有稳定解。为了改善 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 的病态性,谱修正迭代算法在不破坏方程等量关系的前提下,采用如下迭代公式:

$$\boldsymbol{X}^{(k)}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}+\boldsymbol{X}^{(k-1)}) \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。式(2)已能够解决许多一般性的病态矩阵问题,但在极端病态问题中,谱修正算法极难收敛,收敛速度非常缓慢,为获得较高精度通常需要进行数百万次迭代。文献[18-19]改进的谱修正迭代算法为:

$$\boldsymbol{X}^{(k)}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{I})^{-1}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}+a\boldsymbol{X}^{(k-1)}) \tag{3}$$

式中,$0\leqslant a\leqslant 1$。当 $a=0$ 时,式(3)与式(1)等价;当 $a=1$ 时,式(3)与式(2)等价,因此式(3)概括了式(1)与式(2)两种情形。改进的谱修正迭代算法也没有改变方程两边的等量关系,具有谱修正迭代算法的所有良好性质。试验表明,减小 a 的确可提高迭代速度,但是当 a 的取值太小时,不能改善法方程系数矩阵的病态性,使算法失去意义。因此,在迭代速度和改善病态性之间权衡选择,这是一个两难的问题,也是 a 很难确定的原因。a 选取的原则是,既能改善矩阵的病态性,又能提高迭代速度。在实际应用中,目前还只能通过试验来选取 a 值。

针对 a 的选择问题,本文提出“自适应谱修正 LU 分解算法”,在极端病态问题中谱修正算法及其改进算法失败的情况下,仍能获得理想的解。该方法采用:

$$\begin{cases}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}^{(k)}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}+a\boldsymbol{X}^{(k-1)}\\ \boldsymbol{X}^{(0)}=\underset{n\times 1}{0}\end{cases} \tag{4}$$

式(4)与式(3)看似等价,实则不同。式(3)迭代中需要进行求逆运算;由于 a 值是自适应确定的,降低 a 值会增加法方程系数矩阵的病态性,因而,采用 LU 分解法解算方程对(4)式进行迭代,以回避求逆。LU 分解法将方程 $\boldsymbol{N}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{W}$ 中的 $\boldsymbol{N}$ 分解为一个上三角矩阵 $\boldsymbol{U}$ 和一个下三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 之积,即 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{U}$。LU 分解法对于大规模矩阵可进行并行计算[20],因而适用于解算大规模方程。在病态矩阵解算方面,LU 分解相对求逆更具优势。

1)设 N、W、a 的初值为:

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{I} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{L}+a\boldsymbol{X}^{(k-1)} \tag{6}$$

$$\begin{cases}\lambda=\min(\mathrm{abs}(\mathrm{eig}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})))\\ a=10^{\mathrm{abs}(\log(\lambda))/2+1}\times\lambda\end{cases} \tag{7}$$

a 的初值根据 $a(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}+a\boldsymbol{I})^{-1}$ 的谱半径 $\rho=\dfrac{a}{a+\lambda}$ 确定,若要平衡矩阵病态性与迭代收敛速率,需对谱半径 ρ 取折衷值,这时 a 指数为 λ 指数的一半加 1,即为式(7)。其中 eig 为矩阵特征值;abs 为绝对值;min 为最小值;log 是以 10 为底的对数;λ 是 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 的最小特征值,对于高病态矩阵,λ 非常接近于 0。如果 λ 为 0,则设 λ 为微小值 eps,即 2^{-52},以避免出现 $a=0$ 的情形。理论上,$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}$ 非负定,其特征值也应非负,但在计算中,当 λ 从负方向接近于 0 时,由于计算误差的存在,特征值可能为负数,因此对 λ 取绝对值计算是必要的。由于 $\rho<\dfrac{1}{1+\lambda}$,相对标准谱修正算法具有更小的谱半径,因而具有更快的收敛速度。

2)设 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{U}$ 的初始值为:$\boldsymbol{L}=\underset{n\times n}{\boldsymbol{L}}$,$\boldsymbol{U}=\underset{n\times n}{\boldsymbol{0}}$,$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵,$\boldsymbol{0}$ 为零矩阵。

3)按以下公式计算矩阵 $\boldsymbol{L}$、$\boldsymbol{U}$ 的各元素,完成 LU 分解:

$$U(k,j)=N(k,j)-\sum_{d=1}^{k-1}(L(k,d)\times U(d,j))$$
$$k=1,\cdots,n,j=k,\cdots,n \tag{8}$$

$$L(i,k)=[N(i,k)-\sum_{d=1}^{k-1}(L(i,d)\times U(d,k))]/U(k,k),k=1,\cdots,n,i=k+1,\cdots,n \tag{9}$$

4)令 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\boldsymbol{X}$,解算方程时先根据 $\boldsymbol{L}\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{W}$ 解算 $\boldsymbol{Y}$:

$$\begin{cases}Y(i)=W(i),i=1,\cdots,n\\ Y(i)=Y(i)-\sum_{j=1}^{i-1}L(i,j)\times Y(j),i=2,\cdots,n\end{cases} \tag{10}$$

再根据 $\boldsymbol{UX}=\boldsymbol{Y}$ 解算最终参数 $\boldsymbol{X}$：

$$\begin{cases} X(i)=Y(i)/U(i,i),i=n,\cdots,1 \\ X(i)=X(i)-\sum_{j=n}^{i+1}U(i,j)/U(i,i)\times X(j), \\ \qquad i=n-1,\cdots,1 \end{cases} \tag{11}$$

5）进行下一轮迭代，a 的值随着迭代残差的变化而改变。如果本次迭代残差与上次迭代残差之比大于 0.75，即 $\mathrm{err}^{(k)}/\mathrm{err}^{(k-1)}>0.75$，可认为迭代残差未能有效降低。由于减小 a 可提高迭代速度，因此降低 a 值为 $a^{(k)}=a^{(k-1)}/2$。若迭代残差下降速度过快，即 $\mathrm{err}^{(k)}/\mathrm{err}^{(k-1)}>0.25$，则增加 a 值以改善法方程系数矩阵的病态性，即 $a^{(k)}=a^{(k-1)}\times 2$。若 a 使得迭代残差平稳地减小，则保持不变，继续迭代。

6）满足迭代精度要求或达到迭代终止条件时停止迭代。图 1 对迭代残差进行全过程跟踪，有单调下降和单调上升两个过程。理想的迭代终止点在残差下降到残差上升的拐点处，即满足 $\mathrm{err}^{(k)}/\mathrm{err}^{(k-1)}>1$ 时，终止迭代。

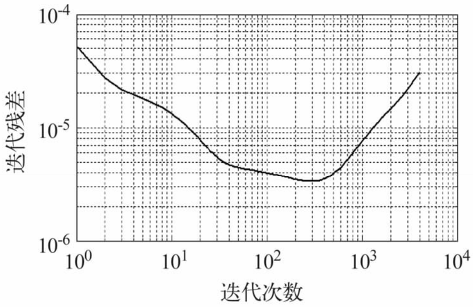

图 1　迭代残差过程线

Fig. 1　the process of iteration residual error

2　计算实例对比分析

2.1　法方程解算

某平差问题得到法方程系数矩阵与常数项如表 1 所示，矩阵 $\boldsymbol{N}$ 的行列式为 $1.441\ 12\times10^{-22}$，条件数为 6.505×10^{13}，可知 $\boldsymbol{N}$ 为高病态矩阵。各种方法解算结果见表 2。

由表 2 可知，由于法方程系数矩阵病态，最小二乘直接解的解算精度较低；谱修正算法获得 5.806×10^{-7} 的解算精度需迭代 100 万次；当取 $\boldsymbol{a}=0.001$ 时，改进的谱修正算法得到 6.630×10^{-11} 的精度需迭代 6 249 次。自适应谱修正 **LU** 分解算法仅进行了 35 次迭代便获得了 $6.596\ 10^{-12}$ 的精度，提高了计算效率和精度。

2.2　Hilbert 病态矩阵解算

典型的 Hilbert 病态矩阵定义为 $H_n=(h_{ij})_{n\times n}$，$h_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$。Hilbert 矩阵是对称正定的，随着阶数 n 的增加，其病态性更趋严重。现构造 12 阶 Hilbert 矩阵 H_{12}，其行列式的值为 $2.839\ 1\times10^{-78}$，条件数为 $1.677\ 559\ 2\times10^{16}$，可知 H_{12} 为严重病态矩阵。令 $\boldsymbol{X}_{12\times1}=[1,1,\cdots,1]^{\mathrm{T}}$，并计算出 $\boldsymbol{B}_{12\times1}=\boldsymbol{H}_{12}\boldsymbol{X}_{12\times1}$。现根据 $\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$ 计算 $\boldsymbol{X}$，计算结果如表 3 所示。

由表 3 可知，直接解算精度很低，结果失真；谱修正算法获得 4.519×10^{-4} 的精度需经过 100 万次迭代；当 $a=10^{-6}$ 时，改进的谱修正算法得到 1.106×10^{-6} 的精度需经过 10 万次迭代；自适应谱修正 LU 分解算法仅进行 57 次迭代便获得 4.741×10^{-7} 的解算精度，减少了迭代次数且收敛速度及计算精

表 1　法方程系数矩阵

Tab. 1　The coefficient matrix of normal equation

系数矩阵 $\boldsymbol{N}$				常数项 $\boldsymbol{W}$
2.327 465 500 136 21	−4.180 987 272 462 60	−2.243 160 155 653 62	−5.284 840 923 560 22	−1.728 128 928 071 9
−4.180 987 272 462 60	7.510 608 811 812 52	4.029 554 936 674 62	9.493 539 687 746 25	3.104 152 679 346
−2.243 160 155 653 62	4.029 554 936 674 62	2.161 925 688 051 27	5.093 429 805 479 16	1.665 202 706 124 36
−5.284 840 923 560 22	9.493 539 687 746 25	5.093 429 805 479 16	12.000	3.923 660

表 2　法方程解算结果

Tab. 2　The results calculated with normal equation

	直接解 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{W}$	谱修正算法 $a=1$	改进的谱修正算法 $a=0.001$	自适应谱修正 LU 分解
X_1	−27.895 996 093 75	−16.282 779 959 587	−16.770 369 773 6257	−16.770 451 126 447 8
X_2	21.945 800 781 25	2.339 217 347 791 51	1.942 977 720 478 89	1.942 979 947 684 75
X_3	−9.912 597 656 25	−20.869 876 882 028 1	−20.636 828 072 552 8	−20.636 776 166 868 2
X_4	−25.113 281 25	0.163 629 861 546 621	0.163 451 884 219 285	0.163 392 262 656 607
迭代次数	1	1 000 000	6 249	35
残差	0.002 1	5.806×10^{-7}	6.630×10^{-11}	6.596×10^{-12}

表 3 Hilbert 矩阵解算结果

Tab. 3 The results calculated with Hilbert matrix

	直接解 $X = H^{-1}B$	谱修正算法 $a=1$	改进的谱修正算法 $a=1\times10^{-6}$	自适应谱修正 LU 分解算法
X_1	1.090 289 793 91	0.999 996 939 121 795	0.999 999 999 945	1.000 000 000 013 88
X_2	0.892 576 217 651	1.000 079 397 451 99	1.000 000 002 41	0.999 999 998 989 624
X_3	1.000 015 258 789	0.999 560 689 332 059	0.999 999 979 79	1.000 000 018 037 51
X_4	0.998 046 875	1.000 668 999 192 35	1.000 000 010 246	0.999 999 866 934 857
X_5	0.984 375	1.000 176 402 059 05	1.000 000 390 545 1	1.000 000 478 240 79
X_6	0.996 093 75	0.999 534 877 769 727	0.999 998 622 39	0.999 999 170 377 425
X_7	1.164 062 5	0.999 456 011 273 746	1.000 001 351 94	1.000 000 422 394 37
X_8	0.765 625	0.999 866 392 615 895	1.000 000 865 19	1.000 000 675 320 87
X_9	1.375	1.000 395 320 668 13	0.999 998 289 104	0.999 999 068 130 85
X_{10}	0.875	1.000 654 323 867 79	0.999 999 099 688	1.000 000 027 954
X_{11}	1.062 5	1.000 342 283 652 42	1.000 002 329 11	1.000 000 469 388 07
X_{12}	0.985 351 562 5	0.999 264 750 389 276	0.999 999 059 54	0.999 999 804 210 079
迭代次数	1	1 000 000	1 000 00	57
残差	0.147 810 211	4.519×10^{-4}	1.106×10^{-6}	4.741×10^{-7}

度更高。继续增加 Hilbert 矩阵的阶数，谱修正算法及其改进算法在有限迭代次数中无法获得指定精度，出现解算失败，但本文方法经过少数迭代仍能收敛于高精度的解。

3 结 语

自适应谱修正 LU 分解算法是针对病态问题的一种新算法，该算法主要贡献如下：1）给出了阻尼因子的确定公式；2）阻尼因子在迭代中不固定，而与迭代残差下降速率自适应匹配；3）采用 LU 分解法解算谱修正方程，回避求逆问题。试验表明，该算法能提高收敛速度与计算精度。

参 考 文 献

1 刘立龙，刘基余，韦其宁. 一种 GPS 快速定位技术研究[J]. 宇航学报，2005，26(1)：39 – 42.（Liu Lilong, Liu Jiyu, Wei Qining. The research on GPS quickly positioning technique [J]. Journal of Astronautics, 2005, 26(1)：39 – 42）

2 刘立龙，唐诗华，文鸿雁. 基于谱迭代修正法 GPS 快速定位研究[J]. 工程勘测，2007(12)：54 – 56.（Liu Lilong, Tang Shihua, Wen Hongyan. The research on GPS quickly positioning technique based on the spectrum correction iteration algorithm [J]. Geotechnical Investigation & Surveying, 2007(12)：54 – 56）

3 邱蕾. 谱修正迭代法在快速静态定位中的应用[J]. 地理空间信息，2005，3(6)：41 – 42.（Qiu Lei. Application of iteration by correcting characteristic value to GPS rapid positioning [J]. Geospatial Information, 2005, 3(6)：41 – 42）

4 王振杰. 测量中不适定问题的正则化解法[M]. 北京：科学出版社，2006.（Wang Zhenjie. The regularization solutions of Ill-posed problems in geodesy [M]. Beijing: Science Press, 2006）

5 沈云中，胡雷鸣，李博峰. Bursa 模型用于局部区域坐标变换的病态问题及其解法[J]. 测绘学报，2006，35(2)：95 – 98.（Shen Yunzhong, Hu Leiming, Li Bofeng. Ⅲ-posed problem in determination of coordinate transformation parameters with small area's data based on Bursa model [J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2006, 35(2)：95 – 98）

6 黄海兰. 病态模型参数估计理论及其在 GPS 整周模糊度解算中的应用研究[D]. 武汉：武汉大学，2002.（Huang Hailan. Parameter estimation method for Ⅲ-condition model and its application to gps integer ambiguity resolution[D]. Wuhan: Wuhan University, 2002）

7 宗志雄，高飞. Landweber 迭代正则化的加速 [J]. 武汉理工大学学报，2008，30(10)：178 – 180.（Zong Zhixiong, Gao Fei. Acceleration of Landweber method of iterated regularization [J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2008, 30(10)：178 – 180）

8 Zhang Di, Huang Tingzhu. Generalized Tikhonov regularization method for large-scale linear inverse problems[J]. Journal of Computational Analysis and Applications, 2013, 15(7)：1 317 – 1 331.

9 Marco D, Arthur N, Lothar R. Square regularization matrices for large linear discrete ill-posed problems [J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2012, 19(6)：896 – 913.

10 Shen Yunzhong, Xu Peiliang, Li Bofeng. Bias-corrected regularized solution to inverse ill-posed models [J]. Journal of Geodesy, 2012, 86(8)：597 – 608.

11 Gisela M L, Ruben S D. Regularization methods for ill-posed problems in multiple Hilbert scales [J]. Inverse Problems, 2012, 28(5)：1 – 31.

12 王新洲，刘丁酉，张勇前，等. 谱修正迭代法及其在测量数据处理中的应用[J]. 黑龙江工程学院学报，2001，15

(2):3 -6.(Wang Xinzhou,Liu Dingyou,Zhang Yongqian, et al. The iteration by correcting characteristic value and its application in surveying data processing [J]. Journal of Heilongjiang Institute of Technology,2001,15(2):3 -6)

13 王新洲,刘丁酉. 最小二乘估计中法方程的迭代解法[J]. 湖北民族学院学报:自然科学版,2002,20(3):1 -4.(Wang Xinzhou, Liu Dingyou. Iteration method by correcting characteristic value for Ⅲ-conditioned equations in the least square estimations [J]. Journal of Hubei Institute for Nationalities:Natural Science Edition,2002,20(3):1 -4)

14 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉:武汉大学出版社,2002.(Wang Xinzhou. Non-linear model parameter estimation theory and its applications [M]. Wuhan:Wuhan University Press,2002)

15 王新洲,刘丁酉,黄海兰. 谱修正迭代结果的协因数矩阵[J]. 武汉大学学报:信息科学版,2003,28(4):429 -431.(Wang Xinzhou,Liu Dingyou,Huang Hailan. The cofactor matrix of the iteration method by correcting characteristic value[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University,2003,28(4):429 -431)

16 侯东阳,张书毕,万亚豪,等. 基于谱修正迭代的 Bursa 模型[J]. 海洋测绘,2011,31(5):15 -17.(Hou Dongyang,Zhang Shubi,Wan Yahao,et al. Bursa model based on the spectrum correction iteration method [J]. Hydrographic Surveying and Charting. 2011,31(5):15 -17)

17 黄海兰. 病态模型参数估计在整周模糊度解算中的应用[J]. 测绘信息与工程,2011,36(2):34 -36.(Huang Hailan. Parameter estimation method for Ⅲ-condition model and its application to GPS integer ambiguity resolution [J]. Journal of Geomatics,2011,36(2):34 -36)

18 潘朝毅. 谱修正迭代法的收敛分析及其改进[J]. 四川教育学院学报,2009,25(5):112 -113.(Pan Chaoyi. An improvement on the iteration method by correcting characteristic value [J]. Journal of Sichuan College of Education,2009,25(5):112 -113)

19 张丽,张书毕,张秋昭,等. 测量中病态问题的一种迭代算法[J]. 全球定位系统,2010(6):27 -29.(Zhang Li, Zhang Shubi,Zhang Qiuzhao,et al. An iteration method of Ⅲ-conditioned problems in surveying [J]. GNSS World of China,2010(6):27 -29)

20 Maurer D,Wieners C. A parallel block LU decomposition method for distributed finite element matrices [J]. Parallel Computing,2011,37(12):742 -758.