

低低跟踪重力卫星星间距离变率对区域质量异常敏感度分析

郭飞霄^{1,2} 肖 云^{1,2} 汪菲菲³ 苗岳旺³

1 西安测绘研究所,西安市雁塔路中段 1 号,710054
2 地理信息工程国家重点实验室,西安市雁塔路中段 1 号,710054
3 西安测绘信息技术总站,西安市西影路 36 号,710054

摘 要: 推导了区域质量变化和球谐系数变化量之间的函数关系,根据该关系式可将不同区域质量异常对重力场变化的影响分离出来。设计仿真实验,分析时变重力场模型下星间距离变率相对稳态背景重力场模型下星间距离变率值的残差变化。结果表明,区域质量异常对星间距离变率的影响在空间分布上是有限的,但星间距离变率对区域质量异常具有很高的敏感性。
关键词: 卫星跟踪卫星;卫星重力;星间距离变量;质量异常;Mascon 方法
中图分类号: P223 **文献标识码:** A

GRACE 卫星反演地球表层质量变化的关键在于高精度的 K 波段测距系统,该系统可精密测量两颗卫星之间的距离和距离变率,精度可达 μm 级^[1]。当前利用 GRACE 卫星数据反演陆地水储量变化大多采用球谐系数法^[2],该方法采用 GRACE 卫星 Level-2 数据的时变重力场模型,反演结果的时间分辨率为 30 d,空间分辨率约为 500 km。为进一步提高陆地水储量变化反演结果的时空分辨率,有学者基于星间距离变率观测值对地球表层质量变化非常敏感这一特性,用 Level-1B 级数据的星间距离变率、GPS 和加速度计观测值直接推求陆地水储量变化。根据反演原理的不同有两种方法:重力位差法^[3]和 Mascon (mass concentration)方法^[4-5]。研究表明,利用 Level-1B 数据可以有效提高反演结果的时空分辨率,反演结果时间分辨率甚至可达 10 d 左右,空间分辨率可提高到 200 km 左右^[6],比球谐系数法更具优势。Mascon 方法是当前研究时变重力场的热点之一,该方法的特点在于利用了星间距离变率观测值对区域质量异常非常敏感的特性^[7],在反演区域质量变化时仅用卫星飞临研究区域上空的数据,因此能提高反演结果的时空分辨率。

本文就星间距离变率对区域质量异常的敏感

性进行研究,通过仿真实验验证了星间距离变率对地球表层质量变化具有很高的敏感性,并对星间距离变率对区域质量异常的敏感范围及程度进行仿真评估。

1 数学模型

地球质量变化及其重新分布对地球重力场的影响可以通过重力场模型的球谐系数变化量来描述。下面将推导区域质量异常与相应球谐系数改变量之间的关系。

地球表层某一小块区域质量变化引起的地球重力位变化为:

$$U = G \int \frac{\rho(\mathbf{r})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} dV \tag{1}$$

式中, G 为引力常数, $\mathbf{r} = (r, \theta, \lambda)$ 为质点的球坐标, r 为质点的地心距, θ, λ 分别为地心余纬和地心经度, dV 为质量块体, $\rho(\mathbf{r})$ 是体密度,根据级数展开可得^[8]:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} \cdot Y_{lm}(\theta, \lambda) Y_{lm}^*(\theta_0, \lambda_0) \tag{2}$$

$$Y_{lm}(\theta, \lambda) = (-1)^m \left(\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot P_{lm}(\cos\theta) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) \tag{3}$$

式中, l, m 分别表示阶和次, P_{lm} 为非完全规格化的勒让德函数, Y_{lm}^* 表示 Y_{lm} 的复共轭。于是式(1)可写为:

$$U = G \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \Gamma_{lm} \frac{1}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta_0, \lambda_0) \tag{4}$$

其中,

$$\Gamma_{lm} = \int \rho(\mathbf{r}) r^l Y_{lm}(\theta, \lambda) dV \tag{5}$$

另一方面, U 可以写成球谐函数的形式:

$$U = \frac{GM}{r_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{R}{r_0}\right)^l \bar{P}_{lm}(\cos\theta) \cdot (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \sin m\lambda) \tag{6}$$

由式(4)、(6)推导得:

$$C_{lm} + iS_{lm} = \frac{1}{(2l+1)MR^l} \int \rho(\mathbf{r}) r^l \cdot \bar{P}_{lm}(\cos\theta) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) dV \tag{7}$$

式中, R 为地球平均半径, \bar{P}_{lm} 是完全规格化的勒让德函数。

因此, 体密度变化 $\Delta\rho(\mathbf{r})$ 引起的球谐系数 $\{\Delta C_{lm}, \Delta S_{lm}\}$ 变化如下:

$$\Delta C_{lm} + i\Delta S_{lm} = \frac{1}{(2l+1)MR^l} \int \Delta\rho(\mathbf{r}) r^l \cdot \bar{P}_{lm}(\cos\theta) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) dV \tag{8}$$

假设地球质量迁移表现为地球表层上一个薄层, 在式(8)中取 $r \approx R$, 并用面密度变化 $\Delta\sigma(\theta, \lambda)$ 代替体密度变化 $\Delta\rho(\mathbf{r})$, 则由式(8)可得:

$$\Delta C_{lm} + i\Delta S_{lm} = \frac{R^2}{(2l+1)M} \int_{\Omega} \Delta\sigma(\theta, \lambda) \cdot \bar{P}_{lm}(\cos\theta) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) d\Omega \tag{9}$$

式中, Ω 是积分区域, $d\Omega$ 是积分单元。考虑到固体地球受物质作用产生形变引起的球谐系数变化为:

$$\Delta C_{lm} + i\Delta S_{lm} = \frac{k_l R^2}{(2l+1)M} \int_{\Omega} \Delta\sigma(\theta, \lambda) \cdot \bar{P}_{lm}(\cos\theta) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) d\Omega \tag{10}$$

式中, k_l 为负荷勒夫数。综合式(9)、(10), 对于地球上某一特定区域内质量变化引起的球谐系数变化量 $\{\Delta C_{lm}, \Delta S_{lm}\}$, 可按公式(11)计算:

$$\Delta C_{lm} + i\Delta S_{lm} = \frac{(1+k_l)R^2}{(2l+1)M} \int_{\Omega} \Delta\sigma(\theta, \lambda) \cdot \bar{P}_{lm}(\cos\theta) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) d\Omega \tag{11}$$

从式(11)可以看出, 某个特定区域内的质量变化可等效为一组球谐系数的改变量。

进一步, 将 $\Delta\sigma$ 写成 $\Delta\sigma = 10 \times \Delta H$ 的形式, ΔH 为区域 Ω 内质量变化的等效水柱高度, 即 Mascon 参数^[5]。比例因子 10 的含义是 1 m² 区域内质量增加或减少 10 kg 等效为区域内水柱升高或减少 1 cm。因此, 式(11)又可写为:

$$\Delta C_{lm} + i\Delta S_{lm} = \Delta H \cdot \left[\frac{10(1+k_l)R^2}{(2l+1)M} \right] \cdot \int_{\Omega} \bar{P}_{lm}(\cos\theta) (\cos m\lambda + i \sin m\lambda) d\Omega \tag{12}$$

从式(12)可以看出, 某个特定区域内, 质量变化引起的球谐系数改变量与等效水柱高成正比。式(12)建立了地球重力场模型球谐系数改变量与区域质量变化等效水柱高之间的函数关系, 通过该关系式可将不同区域的质量变化对地球重力场的影响分离出来^[4]。Mascon 方法正是利用该原理, 提高了地球表层质量变化反演结果的空间分辨率。

2 仿真实验

2.1 实验设计

根据 §1 可知, 给定区域质量变化的等效水柱高, 就可按照式(12)计算出一组球谐系数的改变量。因此, 为分析星间距离变率对地球表层区域质量异常敏感程度, 以 GRACE 卫星为背景, 采用 STK 软件仿真生成 GRACE 卫星轨道及星间距离变率数据, 并设计如下实验方案。

1) 以 60 阶的 EGM96 模型作为稳态的背景重力场 $\{\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}\}$, 积分得到两颗卫星的轨道, 并计算对应时刻的星间距离变量值 $\dot{\rho}_1$ 。

2) 以两颗卫星星下点轨迹经过的某一点为中心的 正方形区域, 模拟增加一定等效水柱高度的质量变化, 并计算等价的球谐系数改变量 $\{\Delta C_{lm}, \Delta S_{lm}\}$ 。

3) 将球谐系数改变量 $\{\Delta C_{lm}, \Delta S_{lm}\}$ 和稳态重力场模型 $\{\bar{C}_{lm}, \bar{S}_{lm}\}$ 对应阶次相加, 得到新的重力场模型 $\{C_{lm}, S_{lm}\}$ 。

4) 在新的重力场模型 $\{C_{lm}, S_{lm}\}$ 条件下, 重新积分得到两颗卫星的轨道, 并计算对应时刻的星间距离变量值 $\dot{\rho}_2$ 。

5) 对两种情形下星间距离变率数据作残差 $\Delta\dot{\rho} = \dot{\rho}_2 - \dot{\rho}_1$, 并对残差序列进行分析。

2.2 实验结果与分析

仿真实验中模拟生成了 24 h 的 GRACE 卫星轨道及星间距离变量数据。卫星星下点轨迹如图 1 所示, 在仿真时段内卫星星下点轨迹两次经过图 1 中圆点位置。以该点为区域中心, 模拟增加一定等效水柱高度的质量变化。

首先, 取以圆点为中心 4°×4° 的实验区域, 在该区域内模拟增加 5 cm 等效水柱高的质量变化, 计算得星间距离变率残差时间序列 $\Delta\dot{\rho}$ 如图 2(a) 所示。

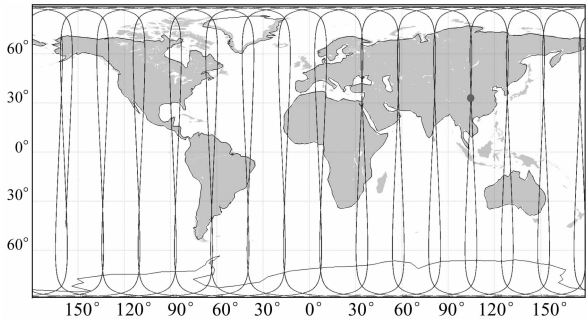


图 1 仿真时段内 GRACE 卫星星下点轨迹
Fig. 1 Ground track of GRACE satellites in simulation time

图 2(a)显示,星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 在两个较短时段内出现了跳变,而这两个时段正好对应两颗卫星通过质量异常区域上空,表明星间距离变率对地球表层区域质量变化很敏感,当卫星经过质量异常区域上空时,星间距离变率观测值能够敏感反映出该区域质量异常。以两颗卫星第一次通过质量异常区域时段为例进行分析(图 2(b))。由图 2(b)可以看出,在两颗卫星通过质量异常区域的时段内, $\Delta\dot{\rho}$ 呈现正弦函数变化,变化量可达 3.0×10^{-8} m/s,变化时间约为 570 s,换算成空间域约 19.6° 范围。因此,由仿真结果可知, $4^\circ\times4^\circ$ 区域的 5 cm 等效水柱高质量异常低低跟踪卫星星间距离变率观测值的影响范围约为星下点轨迹距质量异常区域中心点 9.8° 的范围,而该范围以外的区域,星间距离变率观测值对该区域质量异常不敏感。上述实验结果表明,区域质量异常对星间距离变率的影响在空间分布上是有限的。

由式(12)可知,地球表层区域的质量变化会引起重力场的局部变化,重力场的局部改变使得两颗卫星轨道也发生改变,卫星轨道的变化又引

起星间距离变率的改变。以两颗卫星的基线中点为研究对象进行分析,如图 3 所示。

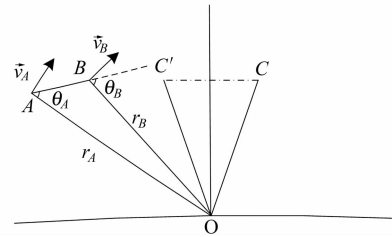


图 3 卫星通过质量异常区域示意
Fig. 3 Satellites go across mass anomaly region

当两颗卫星进入到质量异常影响范围后,基线中点受区域质量异常引起的加速度在基线方向上的分量为:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\text{mid}}(t) &= \vec{a}_B(t) - \vec{a}_A(t) = \\ &= \frac{G\Delta m}{r_B(t)^2} \cos\theta_B(t) - \frac{G\Delta m}{r_A(t)^2} \cos\theta_A(t) = \\ &= G\Delta m \left(\frac{\cos\theta_B(t)}{r_B(t)^2} - \frac{\cos\theta_A(t)}{r_A(t)^2} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

式中, G 为万有引力常数, Δm 为该区域质量变化, r 为卫星到区域中心的距离, θ 为区域异常引起的加速度方向和基线方向的夹角。令 $\vec{a}_{\text{mid}}(t) = G\Delta m \cdot f(t)$,由于 G 、 Δm 为大于 0 的常数,因此,加速度 $\vec{a}_{\text{mid}}(t)$ 和函数 $f(t)$ 的变化是一致的:

$$f(t) = \frac{\cos\theta_B(t)}{r_B(t)^2} - \frac{\cos\theta_A(t)}{r_A(t)^2} \quad (14)$$

$f(t)$ 变化如图 4 所示。对比图 2(b)可以看出,在两颗卫星通过质量异常区域的时段内, $f(t)$ 的变化与星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 的变化基本一致,两组时间序列的相关系数为 0.92。这是因为地球表层区域质量变化引起地球重力场的局部改变,当两颗卫星进入到质量异常区域影响范围后,质量异常引起的加速度在两卫星基线方向上的分量使得星间距离变率发生改变。因此,星间距离变率的变化与质量异常引起的加速度在基线方向分量的变化相同。而当两卫星位于图 3 中的 C 和 C' 点,即两卫星到质量异常区域距离相等时, $\vec{a}_{\text{mid}}(t)$ 为 0,相应的星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 也为 0。

由以上分析可知,区域质量异常引起地球重

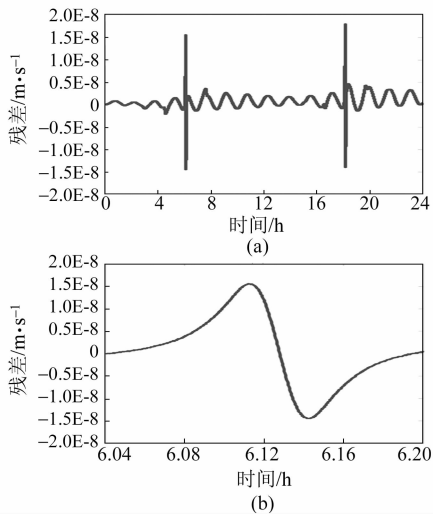


图 2 星间距离变率残差变化

Fig. 2 Residual of intersatellite range rate

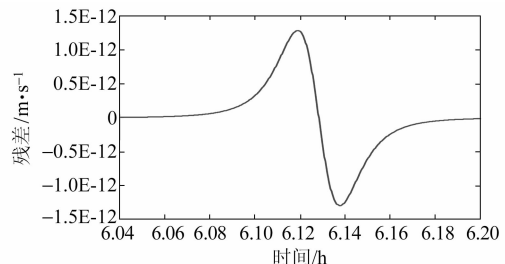


图 4 函数 $f(t)$ 的变化

Fig. 4 Variation of function $f(t)$ over time

力场的局部改变,重力场局部改变引起的加速度在两颗卫星基线方向上的分量使得星间距离变率发生变化。为进一步分析星间距离变率对区域质量异常的敏感度,设计两组实验进行分析。

实验一 保持模拟区域质量变化的等效水柱高度不变,分析质量异常区域大小对星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 影响。等效水柱高度取 5 cm 不变,区

域大小分别为 $2^{\circ}\times 2^{\circ}$ 、 $4^{\circ}\times 4^{\circ}$ 、 $6^{\circ}\times 6^{\circ}$ 和 $8^{\circ}\times 8^{\circ}$,所得结果如图 5 所示。从图 5 可以看出,随着质量异常区域面积的增大,在两颗卫星通过质量异常区域上空时,星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 的变化幅度逐渐增大,4 种情形下变化量分别为 0.8×10^{-8} 、 3.0×10^{-8} 、 5.6×10^{-8} 和 8.2×10^{-8} m/s。

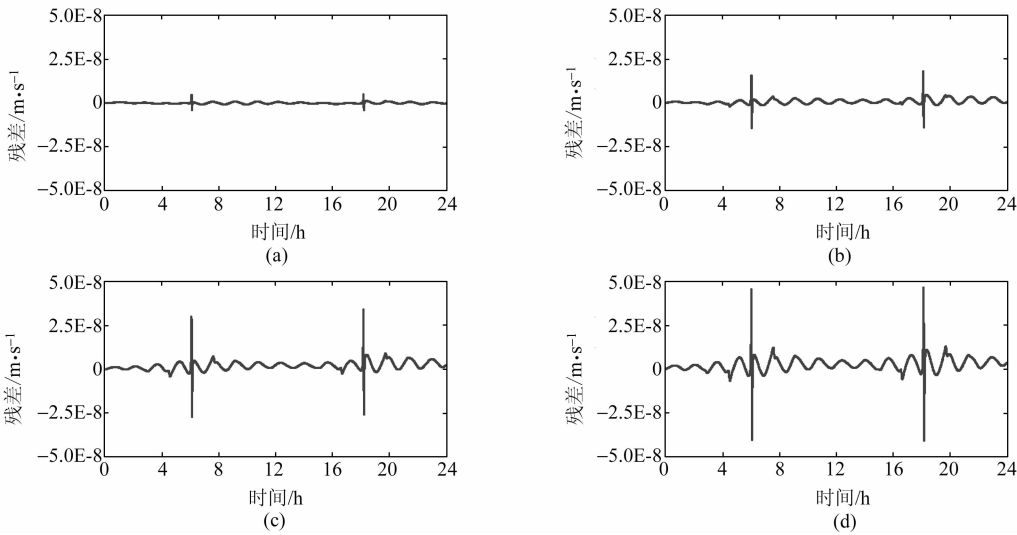


图 5 不同区域大小质量异常对星间距离变率影响
Fig. 5 Influence of mass anomaly to KBRR observation with different area

实验二 保持质量异常区域大小为 $4^{\circ}\times 4^{\circ}$,质量变化等效水柱高分别为 2、4、6 和 8 cm,所得星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 结果如图 6 所示。从图 6 可以看出,随着质量变化的等效水柱高度增大,在两颗卫星通过质量异常区域上空时,星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 的变化幅度逐渐增大,4 种情形下变化量分别为 1.2×10^{-8} 、 2.5×10^{-8} 、 3.6×10^{-8} 和 4.8×10^{-8} m/s。

以上两个实验结果表明,星间距离变率对区

域质量异常非常敏感,星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 的变化幅度与该区域质量变化 Δm 的大小有关。 Δm 表达式为:

$$\Delta m = \rho_w S \Delta H \tag{15}$$

式中, ρ_w 为水密度, ΔH 为该区域内等效水柱高度变化, S 为区域面积。显然,在保持区域面积 S 或等效水柱高 H 不变的情况下,随着 H 或 S 的增大,区域质量变化 Δm 也相应增大,星间距离变率残差 $\Delta\dot{\rho}$ 变大,表明对该区域质量异常敏感程度提高。

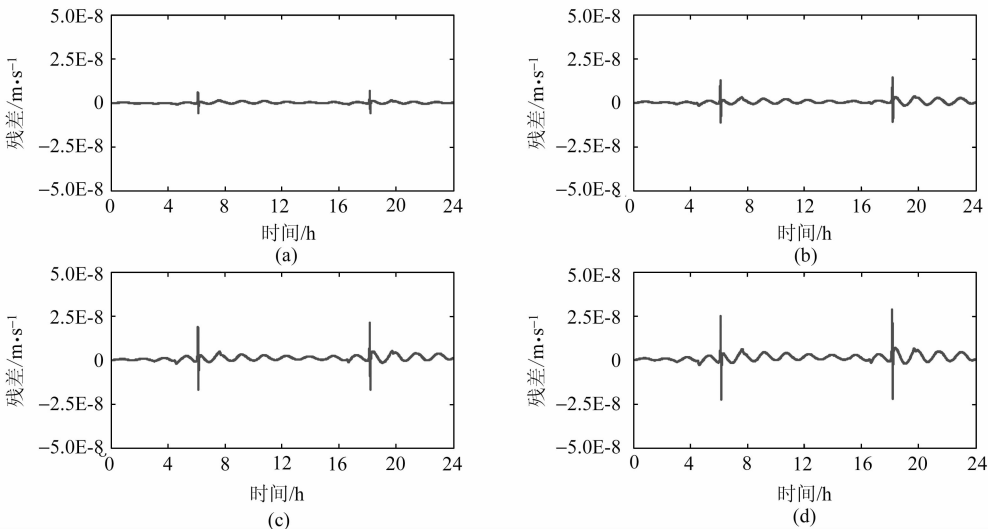


图 6 不同等效水高区域质量异常对星间距离变率影响
Fig. 6 Influence of mass anomaly to KBRR observation with different equivalent water height

3 结 语

1)区域质量异常对星间距离变率的影响在空间分布上是有限的,对于 $4^{\circ}\times 4^{\circ}$ 区域的 5 cm 等效水柱高质量异常,星间距离变率观测值的影响范围集中在星下点轨迹距离区域中心点约 9.8° 左右的范围。

2)星间距离变率观测值对区域质量变化非常敏感, $4^{\circ}\times 4^{\circ}$ 区域 2 cm 等效水柱高的区域质量异常引起的星间距离变率变化量为 1.2×10^{-8} m/s,星间距离变率观测值变化量随着区域质量的增大而增大。

参考文献

[1] 肖云. 基于卫星跟踪卫星数据恢复地球重力场的研究[D]. 郑州: 信息工程大学, 2006 (Xiao Yun. Research on the Earth Gravity Field Recovery from Satellite-to-Satellite Tracking Data[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2006)

[2] Wahr J, Molevarar M, Bryan F. Time Variability of the Earth's Gravity Field: Hydrological and Oceanic Effects and Their Possible Detection Using GRACE [J]. Journal of

Geophysical Research, 1998, 103(B12):30 205-30 229

[3] Han S C, Shum C K, Braun A. High-Resolution Continental Water Storage Recovery from Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking [J]. Journal of Geodynamics, 2005, 39(1): 11-28

[4] Rowlands D D, Luthcke S B, Mccarthy J J, et al. Global Mass Flux Solutions from GRACE: A Comparison of Parameter Estimation Strategies-Mass Concentrations Versus Stokes Coefficients [J]. Journal of Geophysical Research, 2010, 115(B01):414-431

[5] 张坤. 基于 Mascon 方法确定时变地球重力场的研究[D]. 武汉: 武汉大学, 2011 (Zhang Kun. Study on the Earth's Temporal Gravity Field Using Mascon Method[D]. Wuhan: Wuhan University, 2011)

[6] 王雷. GRACE 时变重力场 [D]. 武汉: 武汉大学, 2006 (Wang Lei. Time-Variable Gravity Field from GRACE [D]. Wuhan: Wuhan University, 2006)

[7] Klosko S, Rowlands D, Luthcke S, et al. Evaluation and Validation of Mascon Recovery Using GRACE KBRR Data with Independent Mass Flux Estimates in the Mississippi Basin [J]. Journal of Geodesy, 2009, 83(9):817-827

[8] Chao B F, Gross R S. Changes in the Earth's Rotation and Low-Degree Gravitational Field Induced by Earthquakes. [J]. Geophysical Journal International, 1987, 91(3):569-596

Sensitivity Analysis of Low-Low Track Gravity Satellite Inter-Satellite Range Rate to Regional Mass Anomaly

GUO Feixiao^{1, 2} XIAO Yun^{1, 2} WANG Feifei³ MIAO Yuewang³

1 Xi'an Research Institute of Surveying and Mapping, 1 Mid-Yanta Road, Xi'an 710054, China

2 State Key Laboratory of Geo-Information Engineering, 1 Mid-Yanta Road, Xi'an 710054, China

3 Technical Division of Surveying and Mapping, 36 Xiyang Road, Xi'an 710054, China

Abstract: High precision inter-satellite range rate is sensitive to mass anomaly in the Earth's surface region. The function of the relationship between regional mass anomaly and spherical harmonic coefficients variation is deduced. According to this relationship, the influence of mass anomaly in different regions on gravity can be separated. The influence is simulated by adding mass variation of a certain height of equivalent water and analyzing the range rate residual of time-variable gravity field relative to background gravity field. The result shows that the influence of regional mass anomaly on range rate is limited spatially, and that range rate is very sensitive, and that the sensitivity is related to the content of mass variation.

Key words: satellite-to-satellite track; satellite gravimetry; inter-satellite range rate; mass anomaly; Mascon method

本刊作者 QQ 群号: 384066837