第28卷第5期
2008年10月

大地测量与地球动力学
JOURNAL OF GEODESY AND GEODYNAMICS

Vol. 28 No. 5
Oct. ,2008

文章编号:1671-5942(2008)05-0087-04

对 Bancroft 算法的改进*

阮仁桂　郝金明
(解放军信息工程大学测绘学院, 郑州　450052)

摘　要　为避免频繁的开平方运算,提出了基于 Lorentz 内积方程残差的抗差 Bancroft 算法。将正交化方法引入到 Bancroft 算法中以提高算法的稳定性并节省内存空间。实验表明,新的抗差算法与原算法抗差效果相当,计算效率提高约 30%。

关键词　Bancroft 算法;Lorentz 内积方程; 权矩阵; 抗差; 正交化

中图分类号:P207^{+}.1　　**文献标识码**:A

IMPROVEMENT OF BANCROFT ALGORITHM

Ruan Rengui and Hao Jinming

(*Institute of Surveying and Mapping*, *Information Engineering University*, *PLA*, *Zhengzhou*　450052)

Abstract　Methods for determining the correct solution of Bancroft-Algorithm are discussed and the new robust Bancroft-Algorithm based on the residuals of Lorentz inner product equation is developed to avoid frequently square root computing. In order to improve numerical stability and reduce memory space cost, orthogonalization algorithm is introduced. The stimulation experiment indicates that the new robust Bancroft-Algorithm has the same anti-outlier effect with the old one, but reduces the time cost by a factor about 30%.

Key words: Bancroft-algorithm; Lorentz inner product equation; weighting matrix; robust; orthogonalization

1　引言

针对 GPS 伪距单点定位观测方程求解的非线性问题,美国的 Bancroft[1] 于 1985 年提出了一种称之为“闭合求解”的全局性非线性最小二乘算法(Bancroft 算法)。这是一种不需要迭代具有代数解析性的直接解算方法,在计算上有效且数值稳定。文献[2]对这种方法进行了详细的论述,提出了抗差 Bancroft 算法和以此为基础的两步非线性滤波方法[2,3]。

该算法是伪距单点定位最常用的方法之一,但是其本身仍存在一些问题有待探讨,比如权矩阵的确定和解的统计特性等问题[2]。本文直接从 Lorentz 内积方程入手,探讨了 Bancroft 算法解的判断方法和权矩阵的确定问题,提出了基于 Lorentz 内积方程残差的抗差 Bancroft 算法。另外,将正交化方法引入到 Bancroft 算法中,证明了正交化方法的有效性。最后通过仿真算例,证明了新的定权方法的正确性,比较了新的抗差 Bancroft 算法与原方法的抗差效果和计算效率。

2　权矩阵的确定和 Bancroft 解的判断

2.1　Bancroft 算法

Bancroft 算法的详细推导过程请参看文献[1]。该算法的主要依据是 R^4 维空间下的 Lorentz 内积。

* 收稿日期:2008-05-13
作者简介:阮仁桂,男,1983 年生,硕士生,主要从事 GPS 精密定位研究. E - mail:rrg2002me@163.com

对于向量 $\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}\in R^4$,定义它们的 Lorentz 内积为:

$$<\boldsymbol{g},\boldsymbol{h}>=\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{h}=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}-\alpha\beta \tag{1}$$

其中:

$$\boldsymbol{g}=[\underset{3\times1}{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}}\ \alpha]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{h}=[\underset{3\times1}{\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}}\ \beta]^{\mathrm{T}},\underset{4\times4}{\boldsymbol{M}}=\begin{bmatrix}\underset{3\times3}{\boldsymbol{I}} & \\ & -1\end{bmatrix} \tag{2}$$

对于第 j 颗卫星有伪距方程:

$$\tilde{\rho}^j-b=\sqrt{(x^j-x)^2+(y^j-y)^2+(z^j-z)^2} \tag{3}$$

式中,$b=c\delta t$ 表示接收机钟差等效距离;$\tilde{\rho}^j$ 表示消除卫星钟差的伪距。定义卫星位置向量为:

$$\boldsymbol{S}^j=[x^j\ \ y^j\ \ z^j]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{T}^j=[(\boldsymbol{S}^j)^{\mathrm{T}}\ \ \tilde{\rho}^j]^{\mathrm{T}} \tag{4}$$

接收机位置向量为:

$$\boldsymbol{\mu}=[x\ \ y\ \ z]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{X}=[\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\ \ b]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

等式(3)两边取平方并表示成 Lorentz 内积方程的形式:

$$\frac{1}{2}<\boldsymbol{T}^j,\boldsymbol{T}^j>-<\boldsymbol{T}^j,\boldsymbol{X}>+\frac{1}{2}<\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}>=0 \tag{6}$$

对于每一个伪距观测值 $\tilde{\rho}^j$ 和对应的卫星位置向量 $\boldsymbol{S}^j$,均可根据式(6)列出一个 Lorentz 内积方程。设在某一历元观测到 $d(d\geqslant4)$ 颗卫星,则可给出此时的 Lorentz 内积方程组:

$$\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\boldsymbol{X}+\lambda\boldsymbol{\tau}=0 \tag{7}$$

其中:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}x^1 & y^1 & z^1 & \tilde{\rho}^1\\ x^2 & y^2 & z^2 & \tilde{\rho}^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ x^d & y^d & z^d & \tilde{\rho}^d\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}=[\theta^1\ \ \theta^2\ \ \cdots\ \ \theta^d]^{\mathrm{T}},\theta^j=\frac{1}{2}<\boldsymbol{T}^j,\boldsymbol{T}^j>$$

$$\underset{d\times1}{\boldsymbol{\tau}}=[1\ \ 1\ \ \cdots\ \ 1]^{\mathrm{T}},\lambda=\frac{1}{2}<X,X>$$

在式(7)中,如果 λ 为已知数(实际上到目前为止 λ 还是未知的),则可得最优估计:

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}\hat{\boldsymbol{\mu}}\\ \hat{b}\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}(\lambda\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{\theta}) \tag{8}$$

其中:$\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的广义逆;$\boldsymbol{P}$ 为伪距观测值的权阵[2]。式(8)中的未知参数 λ 可由以下二次方程解出:

$$<\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau}>\lambda^2+2(<\boldsymbol{F}\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{F}\boldsymbol{\theta}>-1)\lambda+<\boldsymbol{F}\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{F}\boldsymbol{\theta}>=0 \tag{9}$$

将上式的两个解 λ_1 和 λ_2 分别代入式(8)中可得到两组解。

2.2 权矩阵的确定和解的判断

由公式(8)和(9)求得的两组解,只有一组是正确的。为了确定正确的解,传统的方法是分别利用两组解反求伪距值。若求得的伪距值与经卫星钟差改正后的原始伪距观测值基本一致,则认为该组解为正确的 Bancroft 定位结果[2,4]。

实际上,Lorentz 内积方程组(7)中,$\boldsymbol{\theta}$ 是卫星位置和伪距的函数,是已知的。$\boldsymbol{X}$ 和 λ 是未知变量,但 λ 可表示为 $\boldsymbol{X}$ 的 Lorentz 内积,可以先把 $\boldsymbol{X}$ 的解表示成 λ 的函数的形式如公式(8),再利用 Lorentz 内积关系求得 λ,从而求得 $\boldsymbol{X}$ 的解。这就是所谓的"闭合求解"的思想。因此不妨把 Lorentz 内积方程组写成误差方程的形式:

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{\theta}+\lambda\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{X}} \tag{10}$$

这样 Bancroft 算法的解实际上是由以下目标函数确定的。

$$J=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}=\min \tag{11}$$

将由公式(9)和(8)求得的两组解分别代入方程组(10),求得残差向量:

$$\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{X}}_i+\lambda_i\boldsymbol{\tau}\quad(i=1,2) \tag{12}$$

进而求得 $J_i=\boldsymbol{V}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}_i$,很显然,使得 J_i 较小的解,即为我们想得到的单点定位解。

现在讨论权距阵 $\boldsymbol{P}$ 的确定问题。传统的方法是直接利用伪距观测量 $\tilde{\rho}^j$ 的先验信息作为确定权矩阵的依据,这在利用线性最小二乘求解时是严密的。但是当伪距观测方程转换为 Lorentz 内积方程时,情况就有所不同了。先不考虑伪距观测误差对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的影响(误差相对于伪距本身要小得多,对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 影响也很小)。由于:

$$\theta^j=\frac{1}{2}<\boldsymbol{T}^j,\boldsymbol{T}^j>=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{S}^j)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}^j-\tilde{\rho}^j\tilde{\rho}^j] \tag{13}$$

根据误差的传播规律,θ^j 的误差可表示为:

$$\Delta_\theta^j=-\tilde{\rho}^j\Delta_\rho^j \tag{14}$$

其中 Δ_ρ^j 为伪距 $\tilde{\rho}^j$ 的误差。这样 Lorentz 内积方程组的权应表示如下:

$$p^j=\frac{\delta_0^2}{D(\Delta_\theta^j)}=\frac{\delta_0^2}{D(\Delta_\theta^j)}\frac{1}{\tilde{\rho}^j\ \tilde{\rho}^j} \tag{15}$$

式中 δ_0^2 为单位权中误差,符号 D 表示方差。显然由上式确定的权阵,要比直接利用伪距观测值的先验信息直接定权更为严密。

3 基于 Lorentz 内积方程残差的抗差 Bancroft 算法

文献[2]提出了抗差 Bancroft 算法。其基本思想是利用伪距残差计算等价权因子[2,5,6],对观测方程重新赋权,然后重新进行 Bancroft 算法解算,直到满足收敛要求。

$$v^j=\tilde{\rho}^j-\hat{b}-\sqrt{(x^j-\hat{x})^2+(y^j-\hat{y})^2+(z^j-\hat{z})^2} \tag{16}$$

在计算伪距残差时需要进行开平方计算,而开平方计算相比于乘除运算要复杂得多。

实际上,正如 2.1 节的分析,Bancroft 算法可以看成是 Lorentz 内积方程组(7)的最小二乘解。Lorentz 内积方程组一旦构成,就不需要再考虑原来的伪距观测方程。这样将 Bancroft 算法的解代入方程(10)就可求得 Lorentz 内积方程的残差向量 $\boldsymbol{V}$ 及其单位权中误差估值:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}}_0 = \sqrt{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{V}/(d-4)} \qquad (d>4) \qquad (17)$$

在此基础上,计算等价权因子,即可实施抗差计算。过程如下:

1) 计算 Bancroft 算法解;

2) 计算 Lorentz 内积方程的残差向量 $\boldsymbol{V}$ 和单位权方差估值,如式(17)(d 不包括权为零的方程);

3) 计算等价权因子,观测方程重新定权;

4) 重新计算 Bancroft 算法解;

5) 收敛则结束计算;否则从第 2 步重新开始。

以上过程可以看出,新的算法成功避免了开平方计算,因此有望节约计算时间。

4　正交化方法应用于 Bancroft 算法

正交化方法是解误差方程的常用方法,它可以提高计算的数值稳定性,同时因避免了矩阵的求逆运算,可以提高运算效率[7]。Lorentz 内积方程组(7)最小二乘解的目标函数(11)可表示为:

$$J = \|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V}\| = \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{V} \qquad (18)$$

其中 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$;$\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}} = \boldsymbol{P}$。$\boldsymbol{Q}$ 可由 Householder 或 Givens 变换确定,从而使:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix} \qquad (19)$$

$\boldsymbol{R}$ 为 4×4 阶上三角阵,$\boldsymbol{O}$ 为($d-4$)阶的零矩阵。令:

$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_\theta\\ \boldsymbol{e}_\theta\end{bmatrix}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{W}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_\tau\\ \boldsymbol{e}_\tau\end{bmatrix} \qquad (20)$$

$\boldsymbol{b}_\theta$ 和 $\boldsymbol{b}_\tau$ 为 4 维列向量,$\boldsymbol{e}_\theta$ 和 $\boldsymbol{e}_\tau$ 为 $d-4$ 维列向量,将式(19)、(20)和(10)代入公式(18),则目标函数可表示为:

$$J = \left\| \begin{bmatrix}\boldsymbol{R}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ b\end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_\theta\\ \boldsymbol{e}_\theta\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}_\tau\\ \boldsymbol{e}_\tau\end{bmatrix}\right)\right\| =$$

$$\left\|\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ b\end{bmatrix} - (\boldsymbol{b}_\theta + \lambda\boldsymbol{b}_\tau)\right\| + \|\boldsymbol{e}_\theta + \lambda\boldsymbol{e}_\tau\| \qquad (21)$$

为使 J 达到最小,有:

$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{M}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ b\end{bmatrix} - (\boldsymbol{b}_\theta + \lambda\boldsymbol{b}_\tau) = 0 \qquad (22)$$

$\boldsymbol{R}$ 为上三角矩阵,其逆矩阵也是上三角矩阵,且求逆方法简单。方程(20)的解为:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}\\ b\end{bmatrix} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{b}_\theta + \lambda\boldsymbol{b}_\tau) \qquad (23)$$

式中 λ 可由下式计算

$$<\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b}_\tau, \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b}_\tau>\lambda^2 + 2(<\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b}_\tau, \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b}_\theta> - 1)\lambda + <\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b}_\theta, \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{b}_\theta> = 0 \qquad (24)$$

容易证明公式(24)与(9)完全等价。将上式求得的两个解分别代入(21)式,使得目标函数 $J = \|\boldsymbol{e}_\theta + \lambda\boldsymbol{e}_\tau\|$较小者为所需要的 λ 值,再代入(23)式即可求得正确的定位解。

实际上,如果令 $\tilde{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{M}$,再采用正交化方法,则可以看到与线性最小二乘完全相同的形式。以上证明了正交化方法在 Bancroft 算法中应用的可行性。还可以证明在线性误差方程的解算过程中常用的递推 Givens 变换或 Givens-Gentleman 变换同样可以应用到 Bancroft 算法中来。前者可减小存储空间需求,后者则避免了平方根运算,可大大提高运算效率。具体方法可参看文献[7]。

5　算例分析

为了验证新的定权方法和抗差 Bancroft 算法的正确性,比较新算法与原算法的抗差效果和运算效率,利用 IGS 武汉站 2007 年 10 月 22 日 0 时 1 分 0 秒接收到的 GPS 信号对应 8 颗卫星的位置、已知的接收机坐标和导航解算得到的接收机钟差作为已知量,模拟产生相应的伪距观测量,模拟观测噪声为 3 m。每次仿真选一颗作为含粗差卫星,其噪声大小取 30 m,这样就产生了 8 组数据,每组数据采样 10 000次。

实验 1:依据观测噪声先验信息采用 3 种方案进行解算(方案 1:原始定权方法;方案 2:新的定权方法;方案 3:线性最小二乘解算)。表 1 统计了定位结果与已知坐标比较求得的三维位置 RMS。可以看出方案 2 与方案 3 的结果比较接近,这说明新的定权方法是正确有效的。相比于方案 1,结果略有改进,但是效果并不明显,这可能是因为各颗卫星到接收机的距离相差较小,两种方法确定的权的差别很小所致。

实验 2:同样利用以上 8 组数据,分别用两种抗差 Bancroft 算法和抗差最小二乘(抗差 LSQ)进行解算。为了考察算法的抗差效果,初始权都取为 1,都采用 IGG 等价权函数,临界值都取 1.3 和 3.0。将解算的位置与已知坐标比较,可以求得位置的三维 RMS,如表 2 所示。从表中的数据可以得出,新算法的抗差效果与旧算法对于不同组的数据有微小的差别,但从总体上可以认为效果相当。

为比较算法的效率,采用第 8 组的 10 000 个采

表 1 3 种方案仿真计算结果比较(单位:m)

Tab. 1 Comparison among simulation solution results of the three schemes(unit:m)

	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组	第 5 组	第 6 组	第 7 组	第 8 组
方案 1	6.789 6	8.452 2	6.748 8	7.270 1	6.911 6	9.409 9	6.971 1	7.796 4
方案 2	6.775 2	8.436 0	6.730 2	7.255 0	6.902 5	9.398 8	6.950 6	7.773 4
方案 3	6.775 2	8.436 0	6.730 3	7.254 6	6.902 3	9.398 0	6.950 6	7.773 2

表 2 不同抗差算法仿真计算结果比较(单位:m)

Tab. 2 Comparison among simulation solution results from different robust estimation algorithm (unit:m)

	第 1 组	第 2 组	第 3 组	第 4 组	第 5 组	第 6 组	第 7 组	第 8 组
旧算法	7.234 6	31.021 9	6.927 6	7.809 5	7.771 9	38.813 2	7.691 8	8.963 0
新算法	7.178 8	30.979 4	6.897 0	7.879 1	7.806 0	38.695 8	7.768 2	9.164 1
抗差 LSQ	7.126 2	30.246 5	6.865 3	7.940 2	8.202 8	37.311 2	7.959 5	9.370 4

样数据,利用 Matlab 软件的 Profiler 工具进行算法的效率分析。结果显示:最小二乘抗差耗时 104.854 s,旧算法耗时 55.347 s,新算法耗时 39.144 s,约为旧方法的 71%,效率提高了近 30%。

6 结论

本文提出的定权方法在理论上更加严密,计算结果准确。由于不同卫星到接收机的距离相差很小,与旧方法相比对解算结果的改进并不明显。但是未来的导航卫星系统的星座更加复杂,导航卫星轨道高度也有较大差别,在这种情况下,新的定权方法有望体现出它的优势。通过直接利用 Lorentz 内积方程组的残差进行抗差 Bancroft 解算,避免了开平方计算,其运算效率可以提高近 30%。本文还证明了正交化方法应用在 Bancroft 算法的正确性。

参 考 文 献

1 Bancroft S. An algebraic solution of the GPS equation[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, 1985, AES-21:56-59.

2 张勤. 非线性最小二乘理论及其在 GPS 定位中应用研究[D]. 武汉大学,2002: 138-144.

2 Zhang Qin. Research on nonlinear least square theory and its applications in GPS positioning [D]. Wuhan University, 2002: 138-144. (in Chinese)

3 Zhang Qin, et al. Nonlinear filter mothod of GPS dynamic positioning based on bancroft algorithm[J]. Transactions of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Jun. 2005:170-176.

4 Teunissen P J G and Kleusberg A. GPS for geodesy [M]. Berlin: Springer Verlag, 1996,202-219.

5 杨元喜. 自适应动态导航定位[M]. 北京:测绘出版社, 2006.

5 Yang Yuanxi. Adaptive navigation and kinematic positioning [M]. Beijing: Survey Press, 2006. (in Chinese)

6 张双成, 等. 一种基于 Bancroft 算法的 GPS 动态抗差自适应滤波[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2007, 32(4):309-311.

6 Zhang Shuangcheng, et al. An adaptively robust filter based on bancroft algorithm in GPS navigation[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University,2007, 32(4): 309-311. (in Chinese)

7 Tapley Byron D, Schutz Bob E and Born George H. Statistical orbit determination [M]. USA, California: Elsevier Inc, 2004. 285-381.